

Dynamique du point

- La **dynamique** est l'étude de la prévision des mouvements de corps soumis à des efforts. En guise d'introduction à la dynamique des solides, nous allons étudier le comportement de particules ou d'objets suffisamment éloignés pour être assimilés à des points.

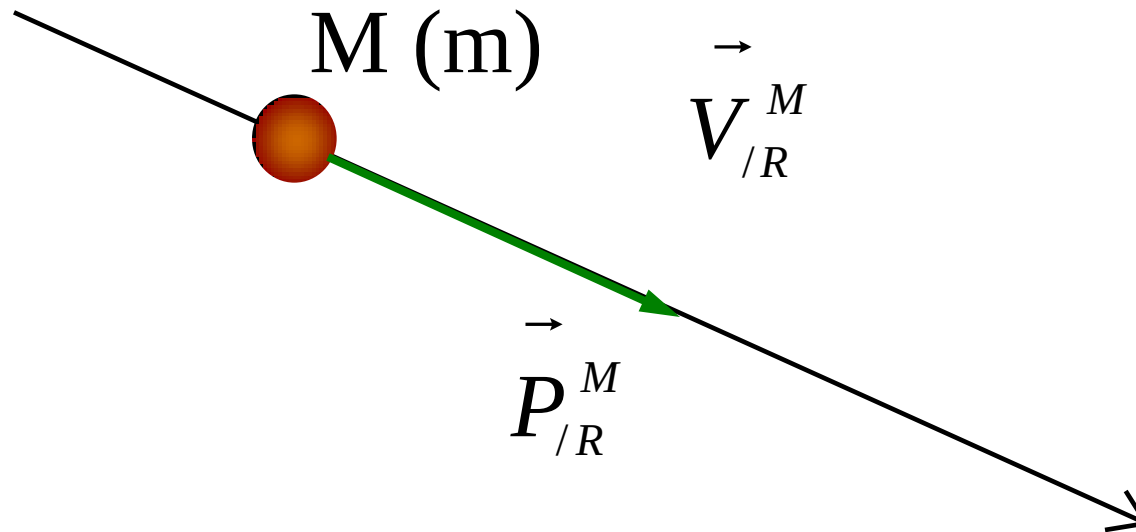


Introduction

- La position d'un point M de l'espace est repérée par trois fonctions du temps (ex : $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$), Ces trois fonctions sont les **paramètres** du mouvement de M . On sait déjà calculer la vitesse et l'accélération du point M par rapport à l'espace de référence.

- Le Principe Fondamental de la Dynamique (PFD) va nous permettre d'écrire des relations entre le mouvement (vitesse, accélération) et les efforts (forces, moments) appliqués sur le point M.

Quantité de mouvement



Quantité de mouvement

- Pour une particule M de masse m animée d'une vitesse , on définit le vecteur «quantité de mouvement » par :

$$\vec{P}_{/R}^M = m \cdot \vec{V}_{/R}^M$$



Principe Fondamental de la Dynamique

- Il existe un repère galiléen R_g tel que :

$$\left[\frac{d\vec{P}_{/R_g}^M}{dt} \right]_{R_g} = \sum_i \vec{F}_{i/M}$$

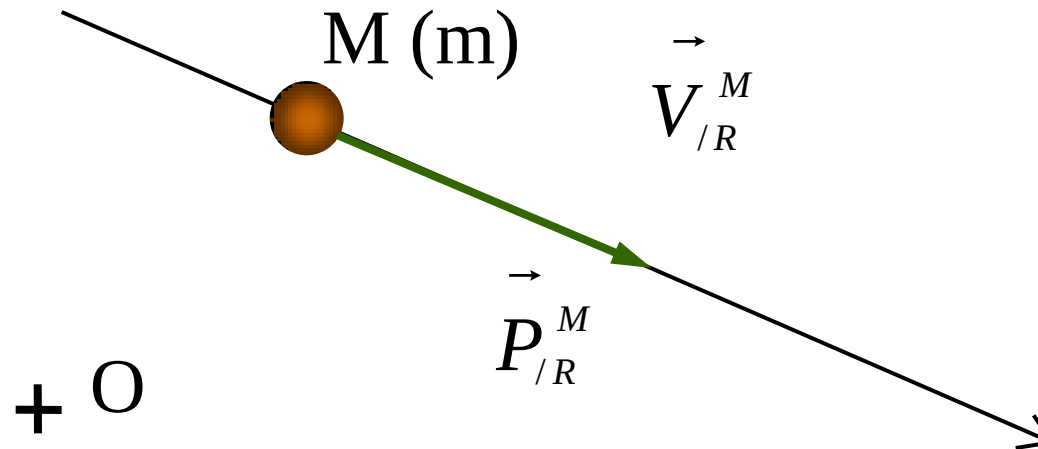


- Avec :

$$\left[\frac{d\vec{P}_{/Rg}^M}{dt} \right]_{Rg} = \left[\frac{dm}{dt} \right]_{Rg} \cdot \vec{V}_{/R}^M + m \cdot \left[\frac{d\vec{V}_{/Rg}^M}{dt} \right]_{Rg}$$

$$\sum_i \vec{F}_{i/M} = m \cdot \vec{\Gamma}_{/Rg}^M$$

Moment des quantités de mouvement



Moment des quantités de mouvement

- On appelle Moment Cinétique :

$$\vec{\sigma}_{M/R}^0 = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{P}_{/R}^M$$

$$\vec{\sigma}_{M/R}^0 = \overrightarrow{OM} \wedge m.\vec{V}_{/R}^M$$



Théorème du moment cinétique

$$\left[\frac{d\vec{\sigma}_{M/Rg}^0}{dt} \right]_{Rg} = \sum_i \vec{M}_O(\vec{F}_{i/M})$$

$$\left[\frac{d\vec{\sigma}_{M/Rg}^0}{dt} \right]_{Rg} = \vec{0} \Rightarrow \vec{\sigma}_{M/Rg}^0 = \vec{cte}$$

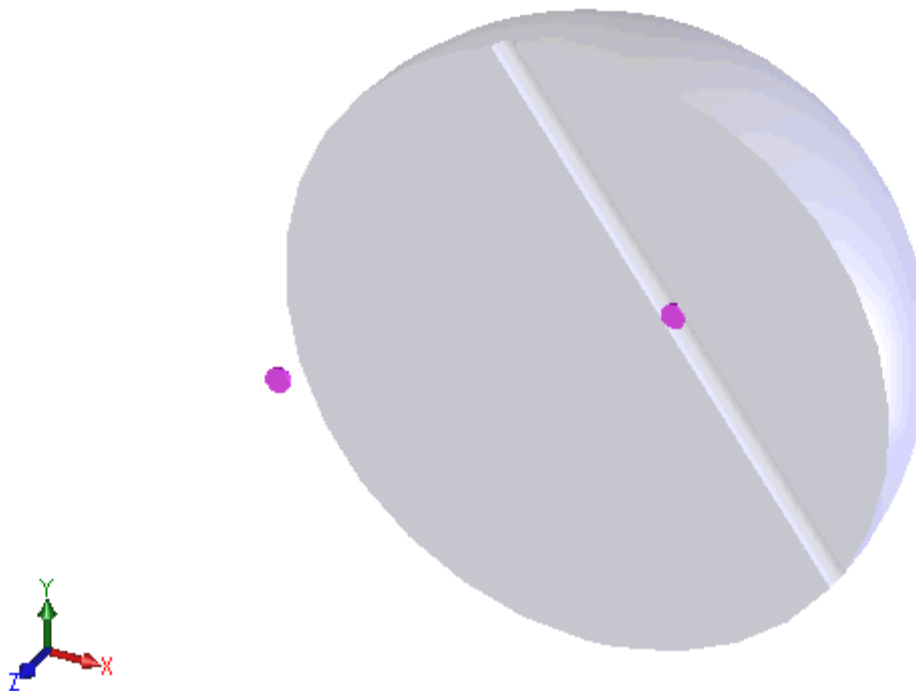


Mouvements à forces centrales

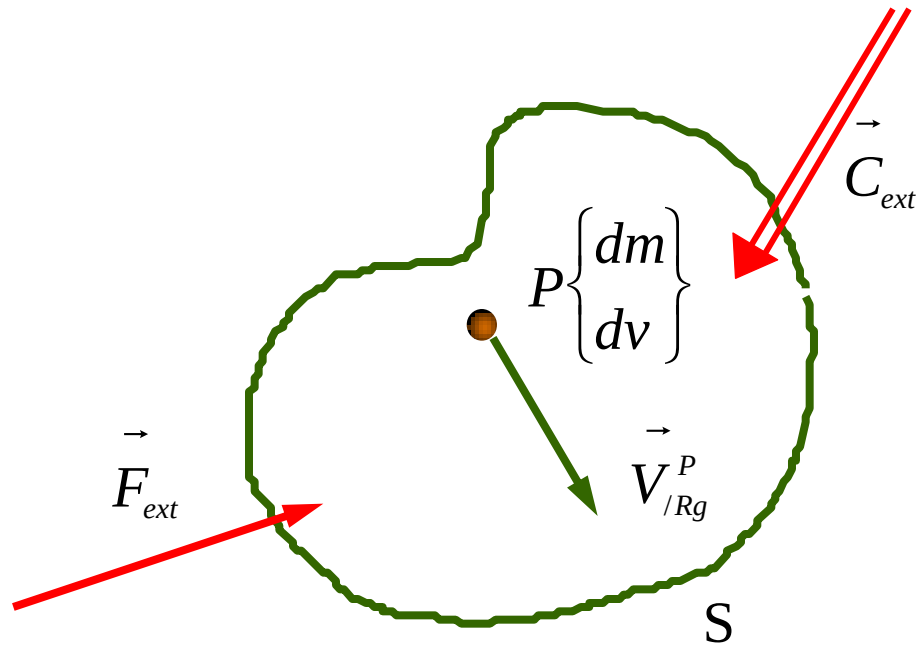
- *Un mouvement à force centrale est un mouvement plan*

$$r^2 \dot{\theta} = cte$$

Exemple Tom et Popov



Introduction à la dynamique du solide



Généralisation du P.F.D.

- *Théorème de la résultante dynamique* (Trois équations scalaires)

$$\sum_Q d\vec{F}_{Q \rightarrow P} + d\vec{F}_{\text{dist} \rightarrow P} = \rho \cdot \vec{\Gamma}_{S/Rg}^P \cdot dv(P)$$

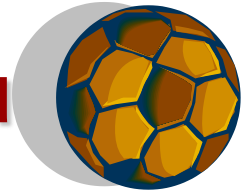
$$\sum_K \vec{F}_{\bar{S} \rightarrow S} = \iiint_S \vec{\Gamma}_{S/Rg}^P \cdot dm(P)$$

Généralisation du théorème du moment cinétique

$$\overrightarrow{AP} \wedge d\vec{F}_{dist \rightarrow P} + \overrightarrow{AP} \wedge d\vec{F}_{Q \rightarrow P} = \overrightarrow{AP} \wedge \vec{\Gamma}_{S/Rg}^P \cdot dm(P)$$

$$\sum_K \vec{M}_A(\vec{F}_{dist \rightarrow P}) = \iiint_S \overrightarrow{AP} \wedge \vec{\Gamma}_{S/Rg}^P \cdot dm(P)$$

Dynamique du solide Cinétique

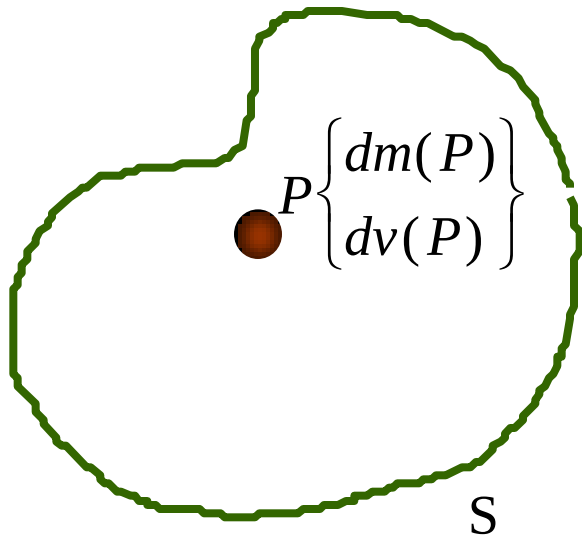




Torseur dynamique

$$\left\{ \boldsymbol{\delta}_{(S / Rg)} \right\}_A = \left\{ \begin{array}{l} \iiint_S \vec{\Gamma}_{/Rg}^P \cdot dm(P) \\ \iiint_S \overrightarrow{AP} \wedge \vec{\Gamma}_{/Rg}^P \cdot dm(P) \end{array} \right\}$$

Introduction à la cinétique



$$\frac{dm(S)}{dt} = 0$$

$$m(S) = \iiint_S \rho(P).dv(P)$$



Equation locale de continuité de la M. M. C.

$$\frac{d\rho(P)}{dt} + \rho(P) \cdot \text{div}(\vec{V}_{/Rg}^P) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} \iiint_S \vec{h}(P) \cdot dm(P) = \iiint_S \frac{d\vec{h}(P)}{dt} \cdot dm(P)$$

Centre d'inertie, centre de gravité

- On appelle **centre d'inertie** d'un système matériel (S), le **barycentre G** de ses masses.

$$m(S) \cdot \vec{OG} = \iiint_S \vec{OP} \cdot dm(P)$$

$$\Rightarrow \iiint_S \vec{GP} \cdot dm(P) = \vec{0}$$



Centre d'inertie, centre de gravité

- Le **centre de gravité** est le point où est appliquée la résultante des efforts de pesanteur.

$$\left\{ \mathcal{S}_S \right\}_O = \left\{ \begin{array}{l} \iiint_S \vec{\psi}(P).dm(P) \\ \iiint_S \vec{OP} \wedge \vec{\psi}(P).dm(P) \end{array} \right\}$$

Torseur cinétique

- On définit torseur cinétique du solide (S) par rapport au repère Rg , par :

$$\left\{ \boldsymbol{\sigma}_{(S / Rg)} \right\}_O = \left\{ \begin{array}{l} \iiint_S \vec{V}_{/Rg}^P \cdot dm(P) \\ \iiint_S \overrightarrow{OP} \wedge \vec{V}_{/Rg}^P \cdot dm(P) \end{array} \right\}$$

$$\vec{R}_{\sigma(S/Rg)} = \iiint_S \vec{V}_{/Rg}^P \cdot dm(P)$$



Moment cinétique

$$\vec{\sigma}_{O(S/Rg)} = \iiint_S \vec{OP} \wedge \vec{V}_{/Rg}^P \cdot dm(P)$$

$$\left\{ \boldsymbol{\delta}_{(S / Rg)} \right\}_O = \left\{ \begin{array}{l} \iiint_S \vec{\Gamma}_{/Rg}^P \cdot dm(P) \\ \iiint_S \overrightarrow{OP} \wedge \vec{\Gamma}_{/Rg}^P \cdot dm(P) \end{array} \right\}$$

$$\vec{R}_{\delta(S/Rg)} = \iiint_S \vec{\Gamma}_{/Rg}^P \cdot dm(P)$$

$$\vec{\delta}_{O(S/Rg)} = \iiint_S \vec{OP} \wedge \vec{\Gamma}_{/Rg}^P \cdot dm(P)$$



Relation entre les torseurs cinétique et dynamique

- Relation entre les résultantes

$$\vec{R}_{\delta(S/R)} = \left[\frac{d\vec{R}_{\sigma(S/R)}}{dt} \right]_R$$



Relation entre les torseurs cinétique et dynamique

- Relation entre les moments

$$\vec{\delta}_{O(S/R)} = \left[\frac{d\vec{\sigma}_{O(S/R)}}{dt} \right]_R + \vec{V}_{/R}^O \wedge \vec{R}_{\sigma(S/R)}$$



Cas particuliers

- O est un point fixe

$$\vec{\delta}_{O(S/R)} = \left[\frac{d\vec{\sigma}_{O(S/R)}}{dt} \right]_R$$



Cas particuliers

- O est le centre d'inertie G

$$\vec{\delta}_{G(S/R)} = \left[\frac{d\vec{\sigma}_{G(S/R)}}{dt} \right]_R$$



Calcul des éléments cinétiques

- Résultante cinétique

$$\vec{R}_{\sigma(S/R)} = m(S) \cdot \vec{V}_{/R}^G$$



Calcul des éléments cinétiques

- Résultante dynamique

$$\vec{R}_{\delta(S/R)} = m(S) \cdot \vec{\Gamma}_{/R}^G$$



Calcul des éléments cinétiques

- Moment cinétique

$$\vec{\sigma}_{O(S/R)} = m(S). \overrightarrow{OG} \wedge \vec{V}_{/R}^G + \overline{\overline{J}}_S^G \cdot \vec{\Omega}_{S/R}$$



Calcul des éléments cinétiques

- Si O est un point fixe

$$\vec{\sigma}_{O(S/R)} = \overline{\mathcal{J}_S^O} \cdot \vec{\Omega}_{S/R}$$



Calcul des éléments cinétiques

- Si O est le centre d'inertie G

$$\vec{\sigma}_{G(S/R)} = \overline{\overline{J_S^G}} \cdot \vec{\Omega}_{S/R}$$



Calcul des éléments cinétiques

- Moment dynamique

$$\vec{\delta}_{S/R}^O = \left[\frac{d\vec{\sigma}_{S/R}^O}{dt} \right]_R + \vec{V}_{S/R}^O \wedge \vec{R}_{\sigma(S/R)}$$



Opérateur d'inertie

- Définition

$$\overline{J}_S^O \cdot \vec{u} = \iiint_S \vec{OP} \wedge (\vec{u} \wedge \vec{OP}) \cdot dm(P)$$



Matrice d'inertie

$$\overline{J}_S^O = \begin{bmatrix} \iiint_S (y^2 + z^2).dm & -\iiint_S xy.dm & -\iiint_S xz.dm \\ -\iiint_S xy.dm & \iiint_S (x^2 + z^2).dm & -\iiint_S yz.dm \\ -\iiint_S xz.dm & -\iiint_S yz.dm & \iiint_S (x^2 + y^2).dm \end{bmatrix}_{(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})}$$



Matrice d'inertie

- Moments d'inertie : A , B et C
- Produits d'inertie : $-D$, $-E$ et $-F$

$$\overline{\overline{J}}_S^O = \begin{bmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{bmatrix}_{(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})}$$



Propriétés

- Si (S) présente un plan de symétrie

$$\overline{\overline{J}}_S^O = \begin{bmatrix} A & -F & 0 \\ -F & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix}_{(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})}$$



Propriétés

- Le solide présente 2 plans de symétrie

$$\overline{\overline{J}}_s^O = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix}_{(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})}$$



Propriétés

- Le solide est d'épaisseur négligeable

$$\overline{\overline{J}}_s^o = \begin{bmatrix} A & -F & 0 \\ -F & B & 0 \\ 0 & 0 & A+B \end{bmatrix}_{(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})}$$



Propriétés

- Le solide présente un axe de révolution

$$\overline{\mathcal{J}}_S^O = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix}_{(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})}$$

Moment d'inertie par rapport à une droite Δ

$$I_{\Delta} = \iiint_S r^2 \cdot dm(P)$$

$$\Rightarrow I_{\Delta} = {}^t \vec{\delta} \cdot \mathcal{J}_S^A \cdot \vec{\delta}$$



Théorème de Huyghens

- C'est la relation entre l'opérateur d'inertie en un point **A** quelconque du solide et le **centre d'inertie G** du solide.

$$\overline{\overline{J}}_S^A \cdot \vec{u} = \overline{\overline{J}}_S^G \cdot \vec{u} + m(S) \overrightarrow{AG} \wedge (\vec{u} \wedge \overrightarrow{AG})$$



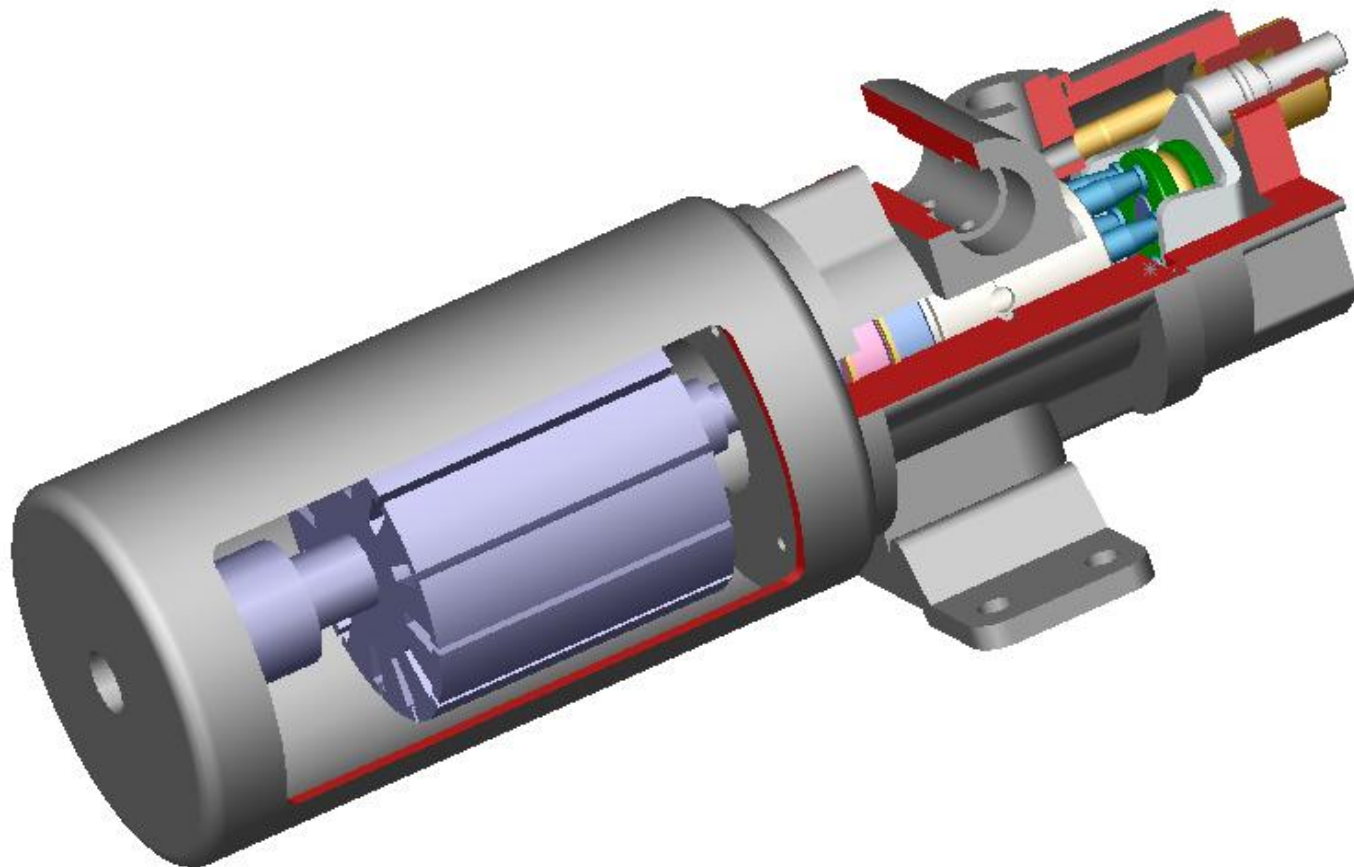
Théorème de Huyghens

- Si $\overrightarrow{AG} = d.\vec{i}$
alors :

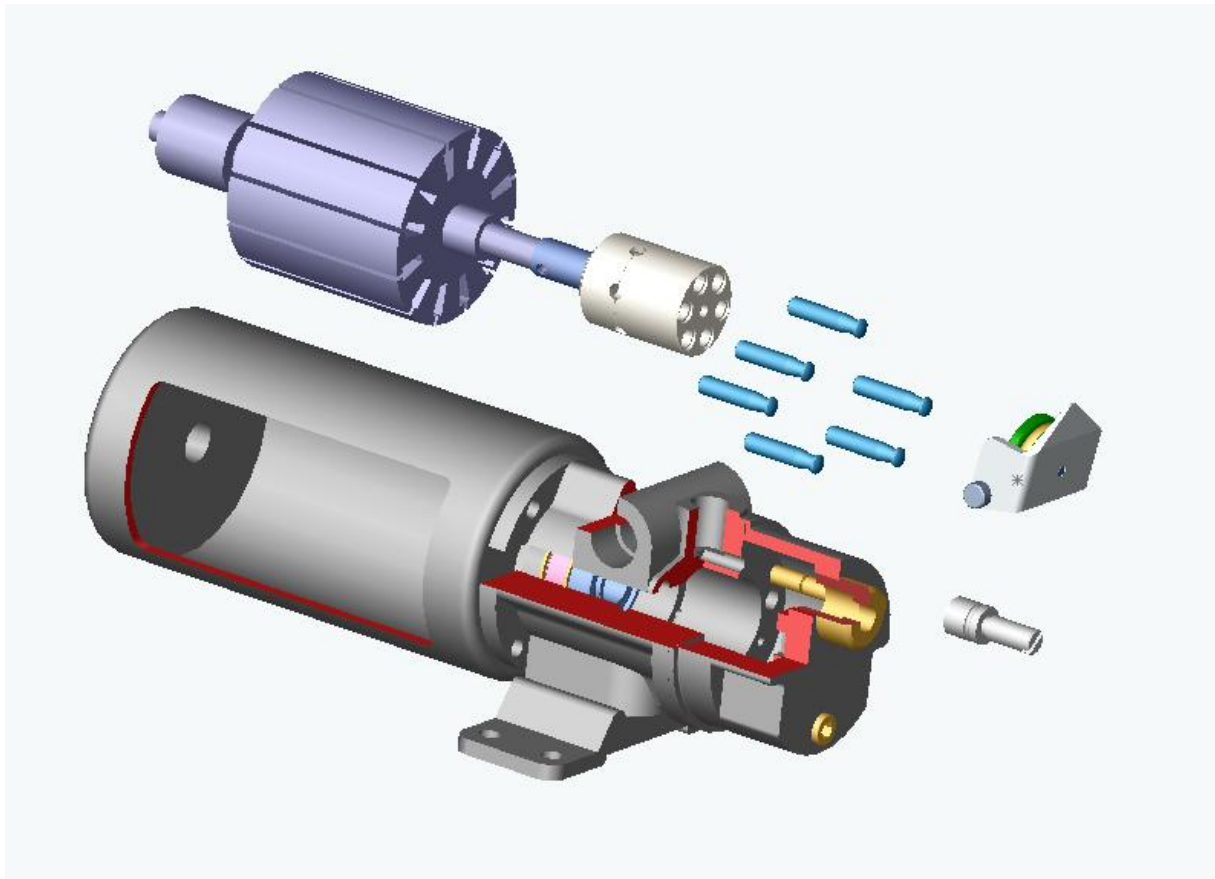
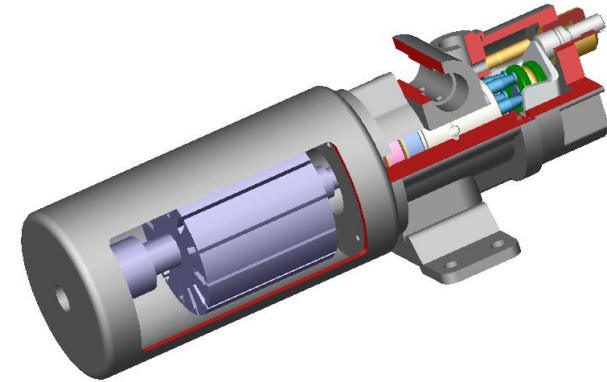
$$I_A = I_G + m.d^2$$

Où I est le moment d'inertie par rapport à un axe perpendiculaire à $\vec{i}$

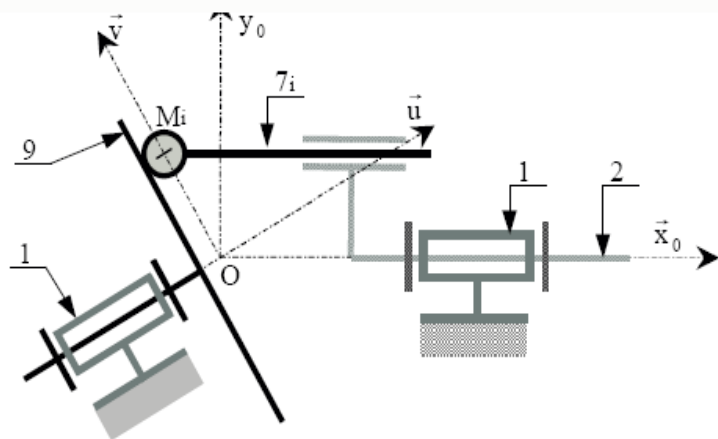
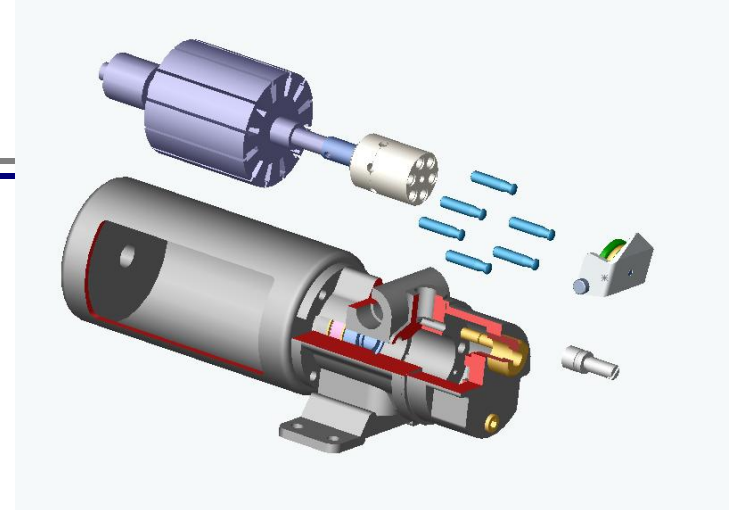
Exemple : Pompe V2H40



Exemple : Pompe V2H40



Exemple : Pompe V2H40



$\vec{\tau}_i$ à été ramené dans le plan $(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0)$

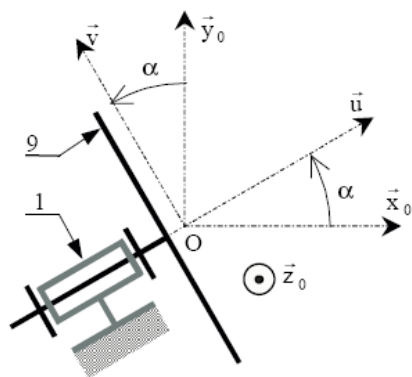


schéma cinématique de la pompe (l'axe du piston

