Théorie des mécanismes

I. Schématisation, fermeture géométrique

Les forces appliquées, les vitesses et propriétés géométriques souhaitées pour le bon fonctionnement du mécanisme, conditionnent la taille des pièces (problèmes de résistance, d'inertie, etc...). Nous avons déjà expliqué que le passage de la réalité aux outils mathématiques permettant ces calculs est la modélisation. Dans ce qui va suivre, nous retenons une modélisation par solides indéformables. Dès lors, on peut se limiter, pour chaque ensemble Σ_i de solides en liaison complète, à une représentation filaire. Si on respecte les positions et propriétés géométriques des points et droites qui caractérisent les liaisons entre les ensembles Σ_i, et si on représente chaque liaison par sa schématisation normalisée, le dessin ainsi obtenu est un schéma cinématique.

1.1 Schéma cinématique

Le schéma cinématique doit faire apparaître clairement toutes les liaisons internes du mécanisme et les liaisons entre le mécanisme et l'extérieur (bâti, carter...). Le schéma cinématique doit refléter les particularités géométriques comme la concourance, le parallélisme, la perpendicularité ou la coaxialité des axes de ces liaisons. Ce schéma sans échelle, respecte la schématisation normalisée des liaisons. Dans certains cas, il pourra être nécessaire d'inventer un symbole pour mettre en évidence certains composants dont la représentation n'est pas normalisée (ressort, courroie, came...). Lorsque toutes les liaisons ont leur axe dans le même plan une seule vue géométrale suffit, mais dans le cas de mécanismes plus complexes, il sera nécessaire de faire un schéma cinématique perspectif.

Considérons l'exemple représenté sur le dessin de définition de la page suivante. Il s'agit de la pompe hydraulique de la suspension holéo-pneumatique de l'ancienne DS Citroën, mais aussi des CX, BX et XM à quelques détails près. La rotation de l'arbre d'entrée 1 est transformé en translation du piston 4 par l'intermédiaire d'un plateau oscillant 2. L'analyse des mouvements relatifs et des réalisations technologiques conduit à un schéma cinématique (voir ci-dessous).

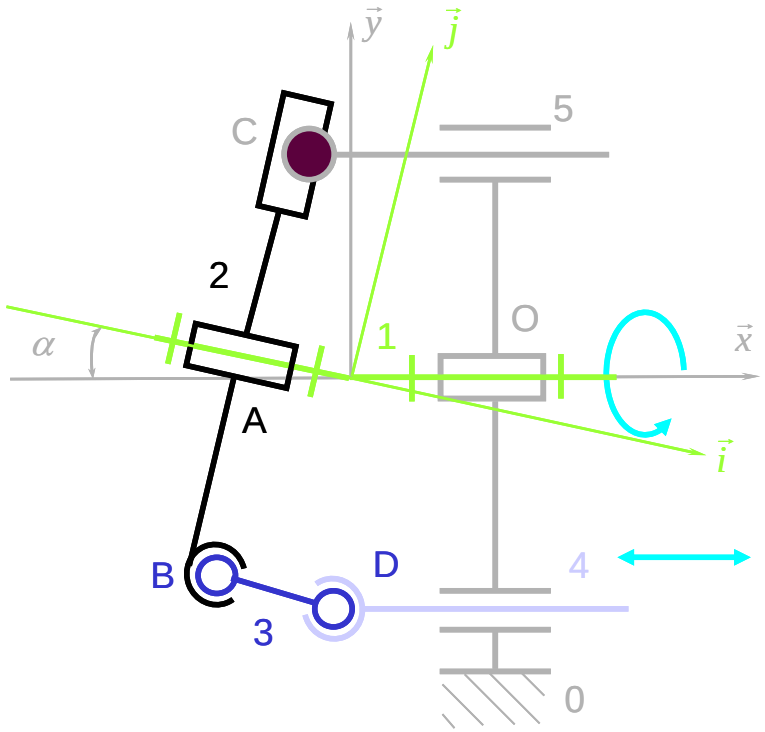
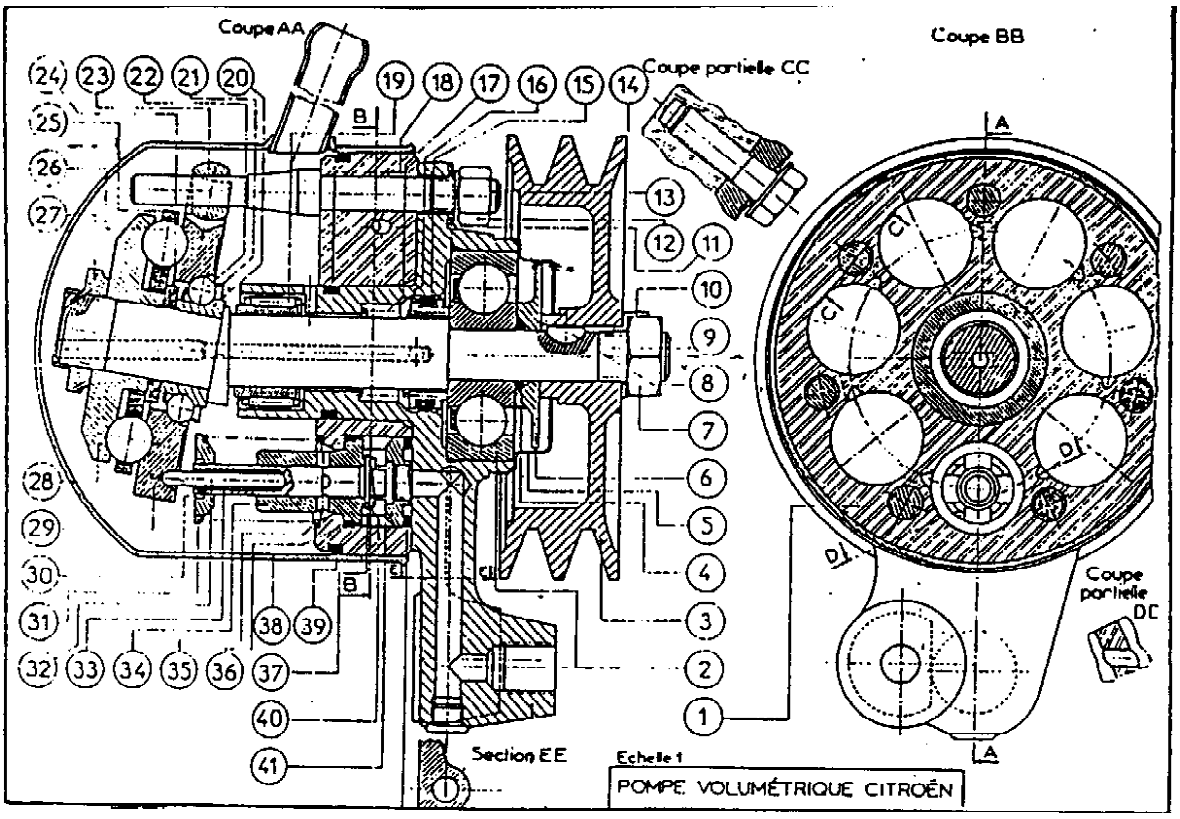
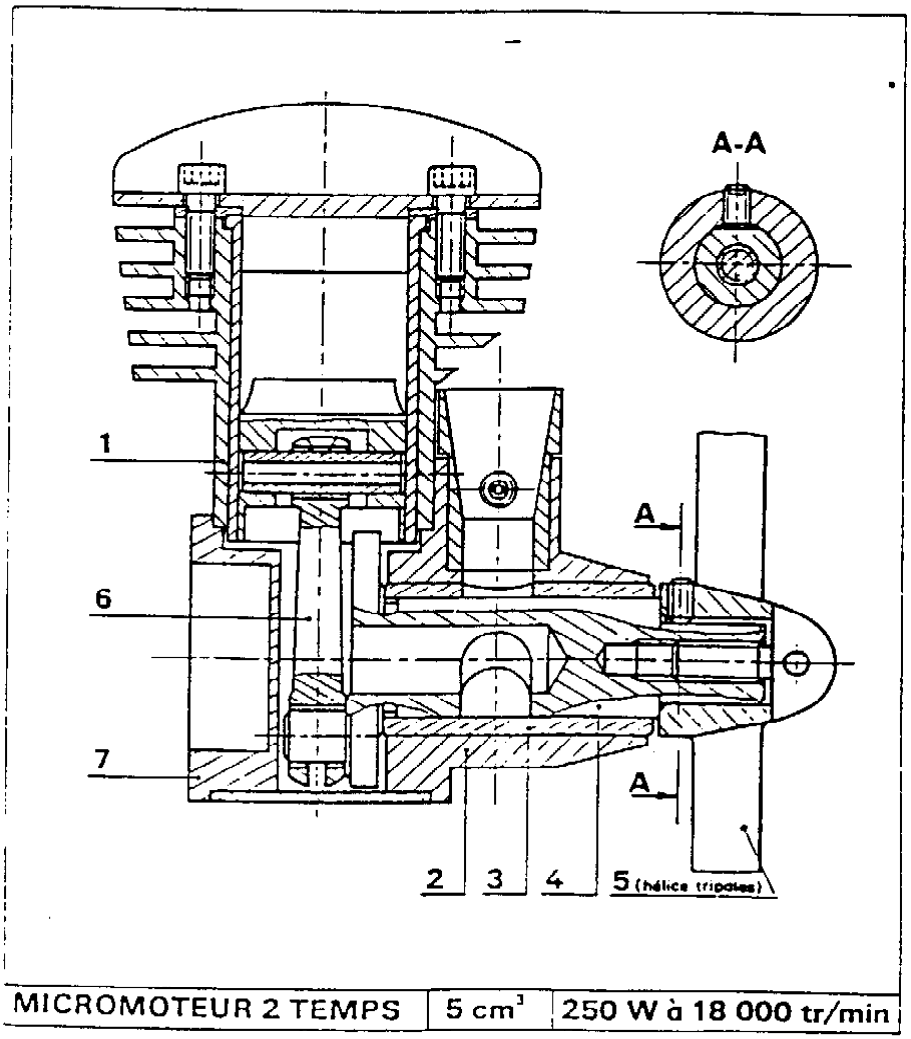
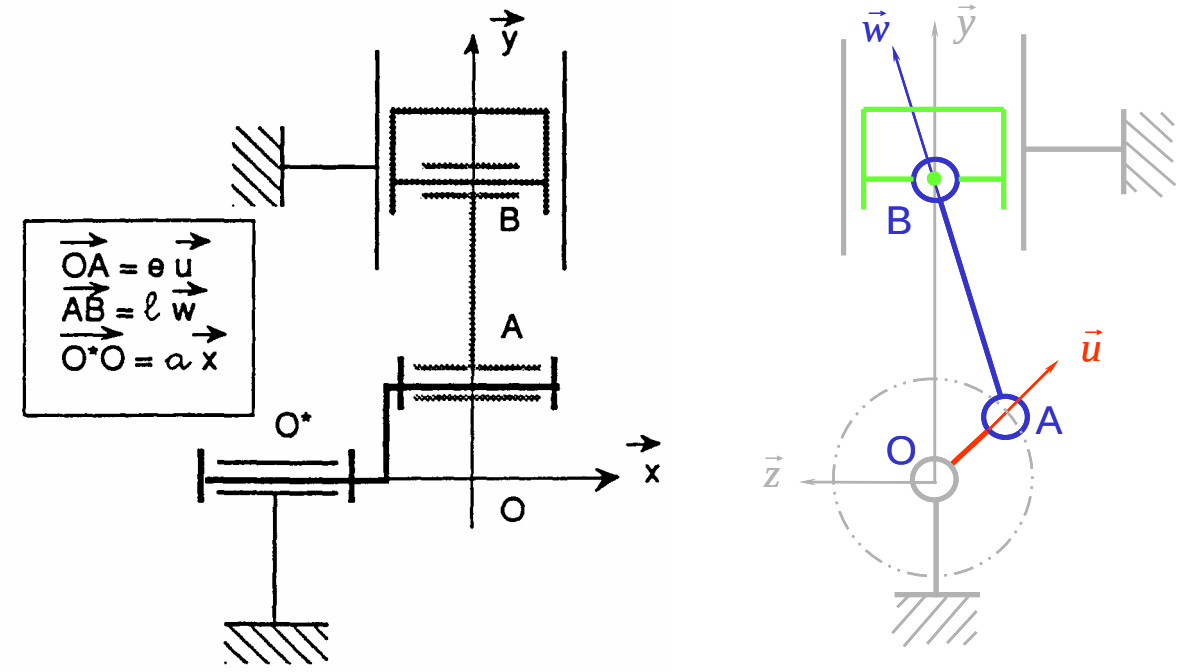


Schéma cinématique de la pompe DS


Coupe AA
Coupe BB
Coupe partielle CC
Coupe partielle DC
Section EE
Echelle 1
POMPE VOLUMÉTRIQUE CITROËN


A-A
1
6
7
A
A
2
3
4
5 (hélice tripales)
MICROMOTEUR 2 TEMPS
5 cm³
250 W à 18 000 tr/min

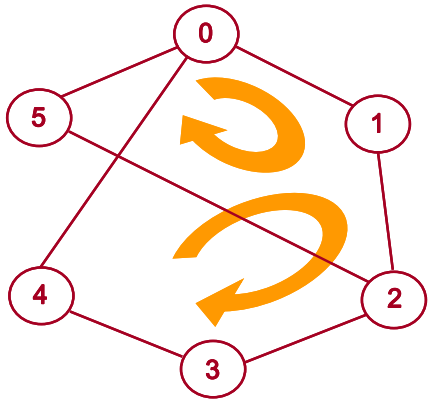
Considérons le très classique exemple de transformation de mouvement de rotation en translation rectiligne alternatif représenté sur le dessin de la page précédente. Le mécanisme est un microbloc moteur pour aéromodéliste. La cinématique est obtenue par un système bielle manivelle dont une représentation schématique est donnée ci-dessous.



Nous allons détailler par la suite les différentes analyses qui permettent d'étudier un mécanisme une fois schématisé. Nous verrons ensuite les limites de cette schématisation. Les conclusions nous guiderons dans l'étude des composants technologiques qui réalisent ces liaisons. L'étape ultime, étant le dimensionnement de ces mécanismes.

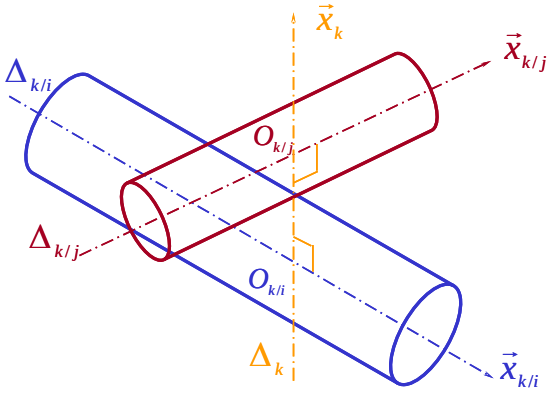
1.2 Fermeture géométrique

1.2.1. Graphe des liaisons



Il est possible, de façon à rendre plus claire encore la lecture des chaînes de liaisons, d'effectuer un graphe des liaisons tel qu'il est réalisé ci-contre pour la pompe DS. Un premier coup d'oeil permet de dénombrer le nombre de liaisons **K**, le nombre de boucles fermées indépendantes **υ**. On détecte aussi les chaînes ouvertes (bras de robot..), les liaisons en **série** ou en **parallèle**.

De cette façon on écrit plus systématiquement les différentes fermetures que nous allons introduire par la suite.



Une liaison $\mathscr{L}_{ij}$ est caractérisée par au moins un des éléments géométriques suivants :

1 point caractéristique $\mathbf{O}_{ij}$
1 direction caractéristique $\mathbf{\Delta}_{ij}$

Nous avons mis en évidence ces divers éléments géométriques lors de l'inventaire des liaisons normalisées.

Chaque pièce (k) de la boucle relie la liaison $\mathscr{L}_{k-1/k}$ (entre les pièces k-1 et k) avec la liaison $\mathscr{L}_{k/k+1}$ (entre les pièces k et k+1), il existe donc 2 éléments géométriques : une droite $\mathbf{\Delta}_k$ (perpendiculaire commune, par exemple) et des points $\mathbf{O}_{k/k-1}$ et $\mathbf{O}_{k/k+1}$ définissant les positions relatives des liaisons.
$\vec{\varphi}_k$ et $\vec{a}_k$ sont respectivement, l'angle entre les directions des deux liaisons et la distance relative des deux liaisons. Pour chaque boucle fermée du graphe des liaisons on peut écrire deux relations de fermeture géométrique : une fermeture **dimensionnelle** et une fermeture **angulaire**.

1.2.2. Fermeture dimensionnelle

La fermeture dimensionnelle d'une boucle de liaisons peut donc s'écrire sous la forme :

$$\vec{0} = \sum_{k=0}^{k=N} (\vec{a}_k + \vec{q}_{k/k+1})$$

où $\vec{q}_{k/k+1}$ correspond aux mouvements de translation relative entre les pièces (k) et (k+1).

1.2.3. Fermeture angulaire

La fermeture angulaire peut s'écrire :

$$\mathbf{1} = \prod_{k=0}^{k=N} \mathbf{B}_k.\mathbf{M}_{k/k+1}$$

où $\mathbf{B}_k$ est une matrice de rotation correspondant à l'angle $\vec{\varphi}_k$ et $\mathbf{M}_{k/k+1}$ la matrice de rotation relative entre les pièces (k) et (k+1). L'écriture des deux fermetures conduit à des relations entre les paramètres de mouvement et les dimensions caractéristiques du mécanisme.

Dans le cas du système bielle manivelle la fermeture dimensionnelle s'écrit :

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BO} = \vec{0} \text{ avec } \overrightarrow{OB} = y_{30}\vec{y}$$

Ce qui conduit à :

$$\vec{0} = e.\vec{u} + l.\vec{w} - y_{30}.\vec{y} \Rightarrow \begin{cases} 0 = e\sin\theta_{10} + l\sin\theta_{20} \\ y_{30} = e\cos\theta_{10} + l\cos\theta_{20} \end{cases}$$

Compte tenu du fait que :

$$\mathbf{B}_1 = \mathbf{B}_2 = \mathbf{1}$$

la fermeture angulaire s'écrit :

$$\mathbf{M}_{01}.\mathbf{M}_{12}.\mathbf{M}_{23}.\mathbf{B}_3.\mathbf{M}_{30}.\mathbf{B}_0 = \mathbf{1}$$

Nous détaillerons la suite des calculs en cours...

Nous allons maintenant mettre en place les deux études permettant d'appréhender les mouvements des pièces (étude cinématique) et les efforts de liaisons (étude dynamique).

II. Etude cinématique

2.1. Fermeture cinématique

Le graphe cinématique (voir plus haut) permet de mettre en évidence toutes les liaisons intervenant dans la pompe Citroën. On constate qu'il y a trois boucles fermées dont deux sont indépendantes. $\upsilon = 2$ et on peut donc écrire deux relations de fermeture cinématique. Chacune des fermetures cinématiques fait intervenir 6 relations scalaires. Si on recense les inconnues du problème, on obtient : 2 pivot glissant (4 inc.) + 2 rotules (6 inc.) + l linéaire annulaire (4 inc.) = 16 inconnues cinématiques.

Les fermetures cinématiques s'écrivent :

$$\begin{cases} \left\{\begin{matrix}\vec{\Omega}_{1/0}\\ \vec{V}^{A}_{1/0}\end{matrix}\right\} + \left\{\begin{matrix}\vec{\Omega}_{2/1}\\ \vec{V}^{A}_{2/1}\end{matrix}\right\} + \left\{\begin{matrix}\vec{\Omega}_{3/2}\\ \vec{V}^{A}_{3/2}\end{matrix}\right\} + \left\{\begin{matrix}\vec{\Omega}_{4/3}\\ \vec{V}^{A}_{14/3}\end{matrix}\right\} + \left\{\begin{matrix}\vec{\Omega}_{0/4}\\ \vec{V}^{A}_{0/4}\end{matrix}\right\} = \left\{\vec{0}\right\} \\ \left\{\begin{matrix}\vec{\Omega}_{1/0}\\ \vec{V}^{A}_{1/0}\end{matrix}\right\} + \left\{\begin{matrix}\vec{\Omega}_{2/1}\\ \vec{V}^{A}_{2/1}\end{matrix}\right\} + \left\{\begin{matrix}\vec{\Omega}_{5/2}\\ \vec{V}^{A}_{5/2}\end{matrix}\right\} + \left\{\begin{matrix}\vec{\Omega}_{0/5}\\ \vec{V}^{A}_{0/4}\end{matrix}\right\} = \left\{\vec{0}\right\} \end{cases}$$

Ce qui donne 12 équations, si elles sont indépendantes. On constate donc un déséquilibre de 4 en faveur des inconnues. Ce déséquilibre correspond à (1) pour la loi entrée sortie (entre Ω_e et V_s) + (3) mobilités internes que l'on peut facilement localiser dans notre cas. Il s'agit des 3 rotations non contrôlées des pièces 3, 4 et 5.

2.2. Indice de mobilité

Pour généraliser les notions précédemment introduites, appelons **υ** le nombre de boucles indépendantes du mécanisme étudié et $\mathbf{I_c}$ le nombre d'inconnues cinématiques. Le nombre de relations cinématiques que permettent d'écrire ces boucles est égal à $\mathbf{E_c}$.

On a : $\mathbf{E_c = 6\upsilon}$

Lorsque toutes les équations de la cinématique sont indépendantes on dispose de **6υ** équations, dans le cas contraire (si certaines équations sont combinaisons linéaires des autres ou si certaines équations donnent « 0=0 ») le nombre d'équations de la cinématique est égal au rang du système d'équations noté $\mathbf{r_c}$. Nécessairement, donc, le rang du système est inférieur ou égal à 6 fois le nombre de boucle :

$$\mathbf{r_c < E_c = 6\upsilon}$$

On définit, l'indice de mobilité **m** du mécanisme, par la différence entre les inconnues cinématiques et les équations indépendantes :

$$\boxed{\mathbf{m = I_c - r_c}}$$

m doit valoir un pour qu'il existe une loi entrée-sortie. Le nombre "m-1" correspond aux mobilités internes. Ces mobilités peuvent être tolérables si elles n'introduisent pas d'effets d'inertie parasites.
Nous verrons à la fin de cette partie, une méthode permettant de déterminer le rang du système sans développer tous les calculs de cinématique, ce qui est en général assez lourd.

Remarque : Si on dérive par rapport au temps les équations obtenues par les fermetures géométriques on retrouve les équations de la cinématique. Cette façon de procéder est plus rapide (et plus économique en calculs) à condition toutefois de savoir exactement combien vaut la mobilité m. En effet on peut toujours dériver par rapport au temps des relations géométriques, mais celles-ci ne seront les équations cinématiques du système que si la mobilité est au moins égale à 1.

III. Etude dynamique

3.1. Equilibre dynamique

3.l.l. Equations de mouvement

A chaque fois qu'il existe une mobilité dans un mécanisme, une des relations issues du principe fondamental de la dynamique donne une équation différentielle de mouvement. Les conditions initiales permettent alors de connaître l'évolution de la mobilité en question (éventuellement en fonction des efforts extérieurs dans le cas des lois entrée/sortie). Par exemple dans le cas de la pompe Citroën, nous avons remarqué une rotation propre non contrôlée de la biellette 3. Si on isole la biellette BD, la projection sur l'axe Î du théorème du moment dynamique au point B ou D ne fait pas intervenir d'effort de liaisons. On obtient donc une équation différentielle dont l'intégration permettra de connaître l'évolution de la rotation propre de la biellette.

Parmi les "n" équations de la dynamique (n = 6x(N-1) pour un système de N solides dont le bâti) "m" d'entre elles ne permettent pas de déterminer les inconnues d'efforts.

3.1.2 Détermination des efforts

On peut déterminer les efforts de liaison en isolant chaque solide (sauf le bâti de référence) du mécanisme et en écrivant le principe fondamental de la dynamique (ou de la statique) pour celui-ci. Le P.F.D (ou S.) donne 6 équations pour chaque solide isolé, soient 6x5 = 30 équations dans le cas de la pompe Citroën. Le nombre d'inconnues d'effort de liaison vaut : 2 pivots (10 inc.) + 2 pivots glissant (8 inc.) + 2 rotules (6 inc.) et une linéaire annulaire (2 inc.) = 26 inconnues d'effort.

Notons que dans une liaison parfaite, le nombre d'inconnues d'effort $\mathbf{I_s}$ et le nombre d'inconnues cinématiques $\mathbf{I_c}$ sont complémentaires à 6. Si le mécanisme possède **K** liaisons, on a :

$$\mathbf{I_s + I_c = 6K}$$

Dans le cas de la pompe DS, on peut donc écrire directement : I_s = 6x(7 liaisons) - 16 = 26
Le nombre d'inconnues d'effort (26) moins le nombre d'équations de la dynamique (30) donne (-4). Ce qui veut dire que si on considère le problème global cinématique et dynamique, on a l'égalité entre le nombre d'équations et le nombre d'inconnues. C'est le cas de tous les systèmes isostatiques.

3.2. Degré d'hyperstaticité

3.2.1 Définition

Le degré d'hyperstaticité **h** d'un système correspond au nombre d'efforts de liaison non déterminés par le P.F.D. Pour déterminer ce degré d'hyperstaticité on cherche le nombre d'équations E_s disponibles pour déterminer les efforts de liaison. E_s est égal au nombre d'équations obtenues par le P.F.D. (ou S.) moins le nombre de mobilités **m** du système étudié. Pour un système de N solides (dont le bâti) on a :

$$\mathbf{h = I_s - E_s} \qquad \text{avec : } \mathbf{E_s = 6(N-1) - m}$$

Dans le cas du système bielle manivelle, nous avons 4 liaisons, 4 solides et une mobilité. Es est donc égal à 6x(4-1) - 1 = 17 équations. I_s vaut 6x4 - 6 =18. Ce qui donne un degré d'hyperstaticité égal à 18 - 17 = 1.

Lorsque le degré d'hyperstaticité est différent de zéro, la résolution du système passe par la prise en compte de la déformation de la structure ou par la gestion des jeux dans le mécanisme. Ces deux dernières façons de procéder ne sont malheureusement pas au programme.

3.2.2. Cas particulier des liaisons parfaites : détermination de "h" par la cinématique

La théorie des graphes permet de montrer que dans le cas de mécanismes constitués de chaînes fermées, on a l'égalité :

$$\upsilon = K - N + 1$$

Aussi nous notons que dans le cas particulier où toutes les liaisons sont parfaites, le degré d'hyperstaticité peut être directement obtenu par l'étude cinématique puisque :

$$h = I_s - E_s \qquad \text{avec : } I_s = 6K - I_c \quad \text{et} \quad E_s = 6(N - 1) - m$$

$$\text{d'où : } h = 6(K - N + 1) - I_c + m = 6(K - N + 1) - r_c$$

ce qui entraîne :

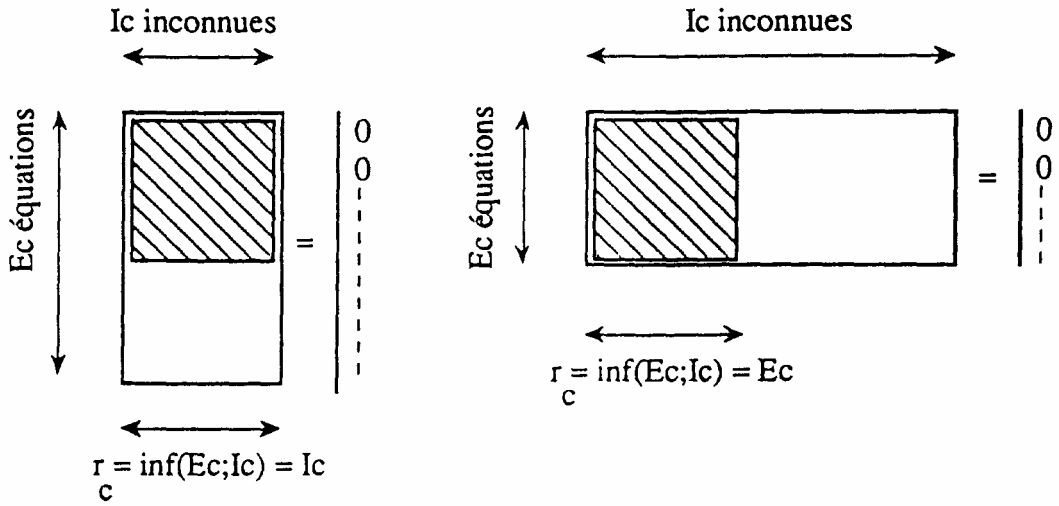
$$\mathbf{h = 6\,\upsilon - r_c}$$

Or r_c est égal au rang du système cinématique. Ce qui implique que si l'on sait déterminer le rang r_c du système cinématique on obtient directement la valeur du degré d'hyperstaticité h. Dans le cas du système bielle manivelle nous avons vu que le rang du système est égal à 5, comme il n'y a qu'une boucle fermée le degré d'hyperstaticité de ce système vaut donc 1.

Il est intéressant de déterminer (sans calcul si possible) l'hyperstatisme des mécanismes de façon à adapter la cotation. On autorise ainsi grâce aux jeux des mobilités interdites par les liaisons parfaites et on rend le mécanisme isostatique. Pour cela il est nécessaire de savoir localiser l'hyperstatisme et c'est l'objet de la suite de cette partie où nous présentons les complexes de droites qui permettent géométriquement de déterminer et de localiser l'hyperstaticité des mécanismes.

IV. Théorie générale des mécanismes

Si les liaisons du mécanisme étudié ne possèdent pas de propriétés particulières, le rang r_c du système cinématique est égal à l'inf (E_c ; I_c). La figure ci-dessous illustre les deux écritures possibles du système cinématique. Le cas où $E_c > I_c$ et le cas ou $E_c < I_c$:

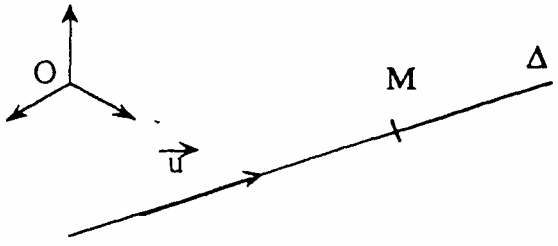


Dans le cas où la géométrie du mécanisme présente des propriétés particulières (droites concourantes, parallèles.,.) on constate un abaissement du rang du système cinématique. Celui-ci devient donc inférieur à l'inf(E_c ; I_c). Dans le cas de chaînes simples fermées, la valeur de r_c peut être géométriquement appréciée. C'est cette méthode de détermination que nous présentons ci-dessous.

4.1. Complexes de droites

4.l.l. Coordonnées Plückeriennes

Nous avons vu que chaque liaison était géométriquement caractérisée par au moins une droite Δ, notons $\vec{u}$ le vecteur directeur unitaire de cette droite. Ce vecteur n'est pas toujours immobile dans le référentiel fixe mais sa norme vaut toujours 1.



On définit le torseur (glisseur) générateur de cette droite par l'association du vecteur $\vec{u}$ et de son moment par rapport à un point quelconque. Par exemple en O :

$$\{\mathcal{G}(\Delta)\} = \left\{ \begin{matrix} \vec{u} \\ \overrightarrow{OM} \wedge \vec{u} \end{matrix} \right\}_O$$

Le point M appartient à la droite Δ. Dans la base orthonormée $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ on peut écrire :

$$\boxed{\vec{s} = \vec{u} = u\vec{i} + v\vec{j} + w\vec{k}} \quad \text{et} \quad \boxed{\vec{g}_O = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{u} = l\vec{i} + m\vec{j} + n\vec{k}}$$

$\vec{s}$ et $\vec{g}_O$ sont les éléments de réduction de ce torseur, (u,v,w,1,m,n) sont les coordonnées Plückeriennes (ces 6 coordonnées ne sont pas indépendantes) de la droite Δ dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. Dans le cas d'une liaison pivot de vitesse de rotation ω autour de Δ on écrit le torseur des vitesses relatives dans la liaison sous la forme :

$$\{\mathscr{V}\} = \begin{Bmatrix} \omega\vec{u} \\ \overrightarrow{OM} \wedge \omega\vec{u} \end{Bmatrix}_O = \omega \begin{Bmatrix} \vec{u} \\ \overrightarrow{OM} \wedge \vec{u} \end{Bmatrix}_O = \omega\{\mathscr{G}(\Delta)\}$$

4.1.2. Complexe linéaire de droites

Soient N droites de l'espace, on dit qu'elles appartiennent à un complexe linéaire si le comoment du torseur de chacune des N droites Δ_i avec le torseur générateur du complexe est nul. Ce qui s'écrit :

$$\left.\begin{array}{l} \{\mathrm{G}\} \otimes \{\mathscr{G}(\Delta_i)\} = 0 \\ \quad \text{ou} \\ Ul_i + Vm_i + Wn_i + Lu_i + Mv_i + Nw_i = 0 \end{array}\right\} \text{ pour tout i tel que : } 1< i < N$$

$\{\mathrm{G}\}$ est le torseur générateur du complexe et ses éléments de réduction en O s'écrivent :

$$\boxed{\{\mathrm{G}\} = \begin{Bmatrix} \vec{S} = U\vec{i} + V\vec{j} + W\vec{k} \\ \vec{G}_O = L\vec{i} + M\vec{j} + N\vec{k} \end{Bmatrix}}$$

Lorsque les N droites appartiennent à deux complexes, on a affaire à une congruence. Si les N droites appartiennent à trois complexes, il s'agit d'une série réglée. En ce qui nous concerne, il faut retenir que dans un mécanisme défini par un certain nombre de droites Δ_i, le rang du système cinématique sera d'autant plus faible que le nombre de complexes auxquels appartiennent les droites est élevé. Nous allons analyser cette propriété plus en détail.

4.1.3. Application à la cinématique

Soit une boucle cinématique fermée, constituée de liaisons pivot seulement (une rotule peut être considérée comme 3 pivots orthogonales passant par le même point). Cette boucle comporte N liaisons caractérisées chacune par leur vitesse de rotation ω_i et leur droite directrice Δ_i. La fermeture cinématique peut s'écrire :

$$\boxed{\sum_i \omega_i \{\mathscr{G}(\Delta_i)\}_O = 0}$$

Si on développe l'expression en fonction des coordonnées Plückeriennes de chaque torseur, on obtient le système cinématique suivant :

$$\begin{bmatrix} u_1 & u_2 & . & . & . & u_N \\ v_1 & v_2 & . & . & . & v_N \\ w_1 & w_2 & . & . & . & w_N \\ l_1 & l_2 & . & . & . & l_N \\ m_1 & m_2 & . & . & . & m_N \\ n_1 & n_2 & . & . & . & n_N \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \\ . \\ . \\ \omega_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ . \\ . \\ 0 \end{bmatrix}$$

Dans le cas où les N droites appartiennent au même complexe {G} on peut écrire :

$$U\begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \\ l_3 \\ . \\ . \\ l_N \end{bmatrix} + V\begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \\ . \\ . \\ m_N \end{bmatrix} + W\begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \\ . \\ . \\ n_N \end{bmatrix} + L\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ . \\ . \\ u_N \end{bmatrix} + M\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ . \\ . \\ v_N \end{bmatrix} + N\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ . \\ . \\ w_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ . \\ . \\ 0 \end{bmatrix}$$

Ce qui revient à trouver une combinaison linéaire des lignes de la matrice ci-dessus. On fait donc baisser le rang du système d'une unité si les N droites caractéristiques du mécanisme appartiennent à un complexe {G}. Evidemment, si les N droites appartiennent à deux complexes $\{G_1\}$ et $\{G_2\}$ alors le rang du système est abaissé de deux unités, etc... En définitive, pour une boucle fermée le rang du système est égal à :

$$r_c = 6 - n_b$$

où n_b est le nombre de complexes.

Remarque :

On peut considérer une translation $\mathscr{v}$ suivant l'axe Δ, de vecteur directeur $\vec{u}$ comme une rotation dont l'axe est à l'infini dans un plan orthogonal à l'axe de la translation. Les torseurs associés à des translations sont des torseurs couples, dont les éléments de réduction sont :

$$\{\mathscr{T}\} = \begin{Bmatrix} \vec{0} \\ \mathscr{v}\,\vec{u} \end{Bmatrix}_O = \mathscr{v}\{\mathscr{G}(\Delta)\} \quad \text{avec} \quad \{\mathscr{G}(\Delta)\} = \begin{Bmatrix} \vec{s} = \vec{0} \\ \vec{g} = \vec{u} \end{Bmatrix} \quad \text{quel que soit M}$$

4.1.4. Condition d'appartenance à un complexe

Le problème qui reste à résoudre est le suivant : comment déterminer, géométriquement, si une droite Δ_i appartient ou non à un complexe donné ? La condition d'appartenance d'une droite à un complexe s'écrit :

$$\{G\} \otimes \{\mathscr{G}(\Delta_i)\} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{s}_i.\vec{G}_O + \vec{S}.\vec{g}_{iO} = 0$$

Dans le cas général, nous ne pouvons pas tirer de conclusions sur la position de la droite Δ_i par rapport à l'axe du complexe. Mais nous pouvons considérer les deux cas suivants : {G} est un glisseur et {G} est un torseur couple. Il ne peut exister que 3 complexes glisseurs et 3 complexes couples indépendants, une droite Δ_i donnée ne peut donc appartenir au plus qu'à 6 complexes.

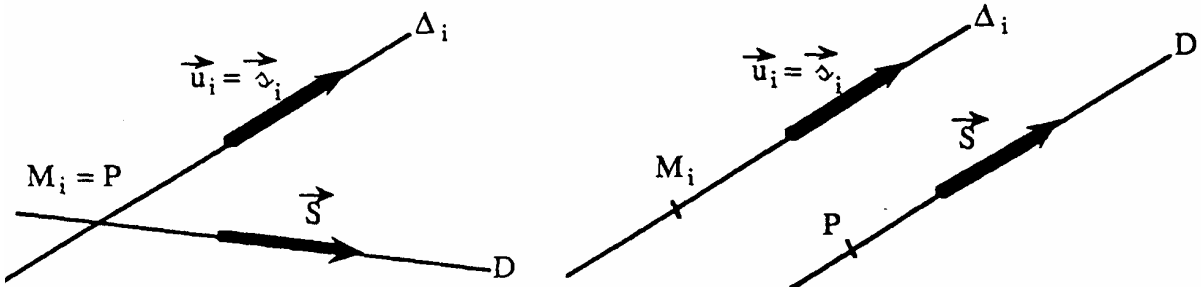
↳ Si {G} est un glisseur générateur de la droite D passant par un point P. La condition d'appartenance devient :

$\vec{S}.\vec{g}_{iP} = 0$ *avec* $\vec{g}_{iP} = \vec{g}_{iM} + \overrightarrow{PM} \wedge \vec{s}_i$ or : $\vec{g}_{iM} = \vec{0}$ car M appartient à la droite Δ_i. On en déduit :

$$\vec{S}.(\overrightarrow{PM} \wedge \vec{s}_i) = 0$$

Cette condition vérifiée dans 2 cas :

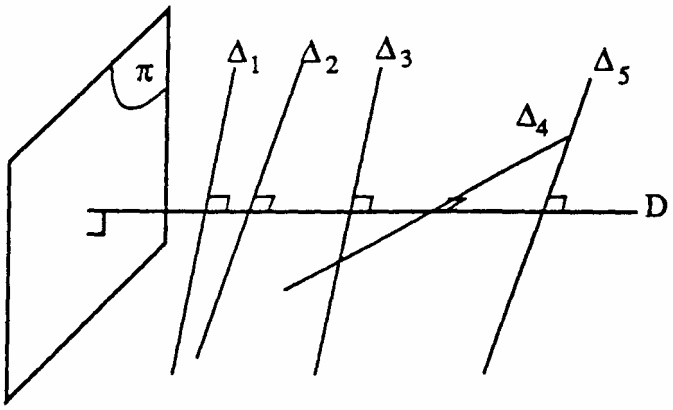
- $\vec{S}$ et $\vec{s}_i$ sont sécantes, la droite Δ_i coupe la droite D associée au complexe
- $\vec{S}$ et $\vec{s}_i$ sont parallèles, la droite Δ_i coupe la droite D sont parallèles.



↳ Si {G} est un torseur couple associé à une direction D. La condition d'appartenance, quel que soit le point P, devient :

$$\vec{s}_i.\vec{G}_{\forall P} = 0$$

Ce qui est possible dans le cas où $\vec{s}_i$ est orthogonal à $\vec{G}_{\forall P}$, ce qui implique que les droites Δ_i sont parallèles à un plan π de normale D.



Ce qui vient d'être développé est applicable au cas où Δ_i est l'axe caractéristique d'une rotation. Dans le cas particulier d'un mouvement de translation de direction $\vec{u}_i$, le torseur générateur de la droite est un torseur couple. Le moment de ce torseur vaut : $\vec{g}_i = \vec{u}_i$

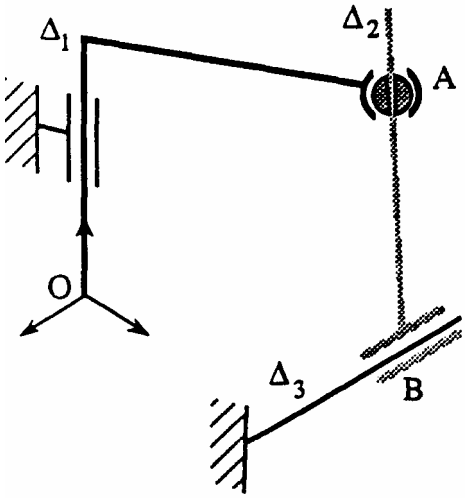
La condition d'appartenance s'écrit : $\vec{S}.\vec{g}_i = 0$

Donc :

- Si {G} est un torseur couple, toutes les droites associées à une translation en font partie.
- Si {G} est un glisseur, il faut que l'axe Δ_i de la translation soit orthogonal à l'axe D du glisseur. Ce qui nous ramène au cas de la figure précédente.

4.1.5. Exemple : Mécanisme ?

Considérons le système représenté sur la figure ci-contre. On se pose la question sur l'opportunité d'une telle réalisation pour la transformation d'un mouvement de rotation de l'axe $O\Delta_1$ en translation de la tige AB le long de l'axe $B\Delta_3$. Pour cela nous allons déterminer son indice de mobilité "m" par la méthode des complexes de droites.



Déterminons d'abord si les droites associées aux liaisons appartiennent à un complexe couple. Δ_2 n'appartient pas au plan formé par Δ_1 et Δ_3, ces 3 droites n'appartiennent donc pas à un même complexe associé à un torseur couple.

Il ne reste donc que le cas des complexes associés à des glisseurs à considérer. Pour cela commençons par regarder ce qui se passe au niveau de la rotule en A. Nous avons là 3 rotations associées à 3 droites orthogonales passant par A, ces 3 droites appartiennent à 3 complexes associés à 3 droites D_l, D_2 et D_3 orthogonales et passant par A. La droite Δ_2 qui passe par A appartient évidemment à ces 3 complexes.

Considérons les deux rotations restantes autour de $O\Delta_1$ et $B\Delta_3$. Parmi les 3 droites D_l, D_2 et D_3 seules 2 peuvent être sécantes avec $A\Delta_i$ et la troisième se trouve alors normale à Δ_1. Les deux complexes sont donc associés à deux droites D_l et D_2 passant par A et incluses dans le plan défini par le point A et la droite Δ_1. De ces deux droites restantes une seule peut couper l'axe $B\Delta_3$, ce qui descend à 1 le nombre de complexe auquel appartiennent les droites associés aux axes de rotation. Celui-ci est associé à la droite D passant par les points A et B.