

DYNAMIQUE DES SYSTÈMES LINÉAIRES**1. Introduction**

Faisons le point de nos connaissances actuelles sur les servomécanismes. D'abord nous avons mis le servomécanisme sous forme d'un schéma fonctionnel, schéma à partir duquel nous savons calculer les fonctions de transfert en boucle ouverte et en boucle fermée du système.

Cependant, jusqu'à présent, nous n'avons pas recherché systématiquement les performances en boucle fermée du système, même si nous avons déjà abordé ces points lors d'exercices ou défini quelques critères de performances, comme le temps de réponse à 5% d'un premier ordre, le coefficient d'amortissement et le critère de non dépassement d'un système du second ordre,...

Parmi les questions à se poser sur les servomécanismes, trois concernent particulièrement l'utilisateur :

1) est-il précis ?

L'écart ε entre la consigne affichée c (la valeur visée) et la valeur de sortie s réellement obtenue, est-il élevé ou faible, voire nul, pour une loi de consigne déterminée. La réponse à cette question nous sera apportée par l'étude de la F.T.B.F.

2) est-il stable ?

La valeur finale de la sortie s n'est-elle obtenue qu'après un grand nombre d'oscillations autour de l'équilibre, caractéristique d'un système trop faiblement amorti? Un équilibre peut-il même être atteint ? Ne risque-t-on pas des oscillations permanentes ("pompage") ?

L'étude de la stabilité intrinsèque, au moyen de critères algébriques ou graphiques, le calcul des marges de stabilité, nous permettront de répondre à cette question et, éventuellement, d'envisager d'améliorer la stabilité.

3) est-il rapide ?

La valeur de sortie s est-elle atteinte au bout d'un temps suffisamment court pour être compatible avec le besoin de l'application?

Pour être capable de répondre à ces questions, et donc de valider ou non la solution vis-à-vis du besoin initial de l'utilisateur, il nous reste les étapes suivantes :

- 1) tracé du lieu en boucle fermée à partir de celui en BO,
- 2) caractérisation de la précision, au moyen de critère(s) appropriés,
- 3) vérification ou non de la stabilité, caractérisation des marges pratiques de stabilité et de la robustesse de la commande de ce point de vue stabilité,
- 4) recherche et réalisation d'une éventuelle compensation, destinée à améliorer un ou plusieurs critère(s) de performances (mais sans détériorer au-delà de l'acceptable les autres critères). Ce moyen de compensation sera, soit un correcteur, soit un retour d'état, soit une technique d'anticipation.

Comme nous allons le montrer, les exigences précédentes sont contradictoires et nécessiteront toujours de rechercher le meilleur compromis : cette contradiction est connue sous le terme de "dilemme stabilité précision".

Nous définirons dans cette série d'autres qualités dynamiques des servomécanismes : temps de réponse, bande passante, résonance, accélération initiale,...

2. Réponse d'un système linéaire**2.1. Modes d'un système**

La F.T.B.F d'un système, $H(p)$, admet des pôles qui sont, soit réels, soit imaginaires conjugués. Les fonctions du temps associées à ces pôles sont les **modes** du système.

$H(p)$ est décomposable en éléments simples :

$$H(p) = \sum_{i=1}^n \frac{a_i}{p - p_i} \quad (a_i, p_i) \in \mathbb{C}^2$$

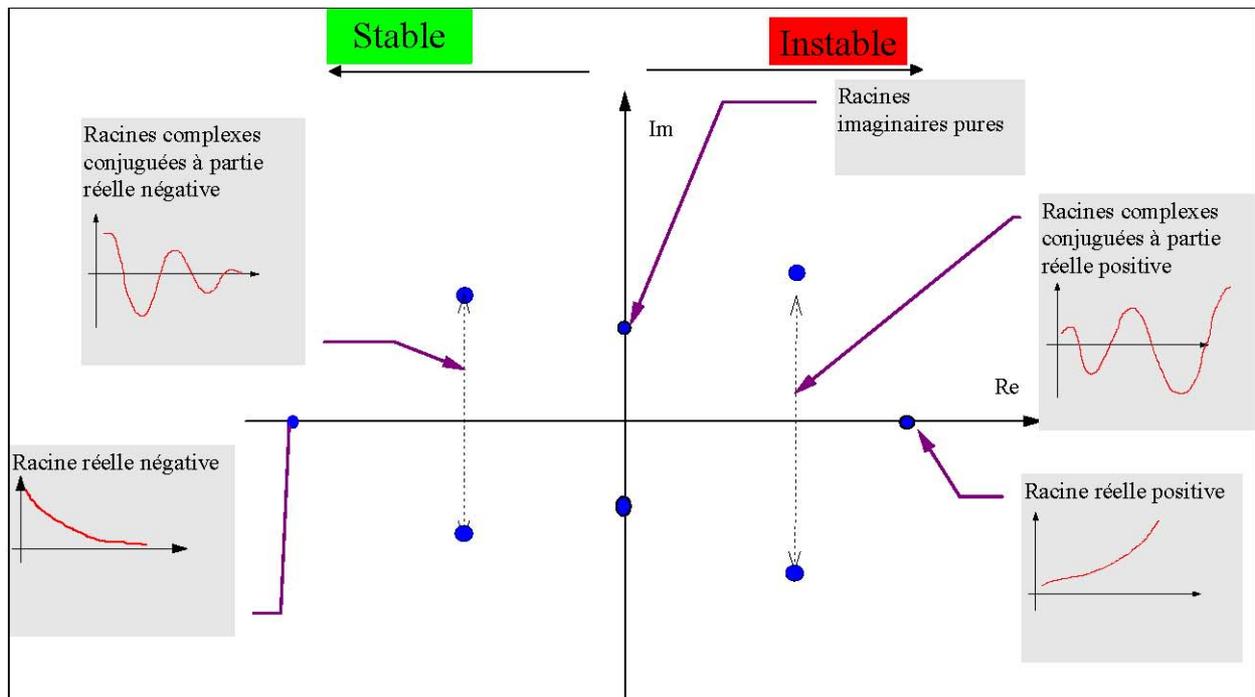
- si $p_i = \sigma$ avec $\sigma \in \mathbb{R}$, il lui correspond par la transformée de Laplace inverse une fonction du temps de type exponentiel $a \cdot \exp(\sigma t)$ appelée **mode exponentiel** (convergent et stable si $\sigma < 0$, divergent dans le cas contraire $\sigma > 0$).
- si $p_i \in \mathbb{C}$, soit $p_i = \sigma + j\omega$, on regroupe alors les deux pôles imaginaires conjugués p_i et \bar{p}_i .

$$\frac{a_i}{p-p_i} + \frac{\bar{a}_i}{p-\bar{p}_i} = \frac{a+b.j}{p-\sigma+j.\omega} + \frac{a-b.j}{p-\sigma-j.\omega} = \frac{2.a(p-\sigma)}{(p-\sigma)^2 + \omega^2} + \frac{2.b\omega}{(p-\sigma)^2 + \omega^2}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{a_i}{p-p_i} + \frac{\bar{a}_i}{p-\bar{p}_i}\right] = K.e^{\sigma.t} . \sin(\omega.t + \varphi)$$

Le mode est alors dit **mode oscillant** avec les caractéristiques suivantes (carte des pôles ci-dessous) :

- si le pôle est près de l'axe réel \Re , alors la fréquence d'oscillation est faible,
- si le pôle près de l'axe imaginaire \Im , alors l'amortissement est faible (ou divergence lente).



Résidu d'un mode

Il n'a pas été pour l'instant tenu compte du fait qu'en général il existe une consigne d'entrée et qu'il est évident que la réponse forcée en dépend.

Les modes de l'entrée se superposent alors à ceux propres au système, ce qu'exprime la relation $S(p)=H(p).E(p)$.

L'influence des différents modes est donné par leurs "résidus" : Si $E(p_i) \neq 0$ ou $E(p_i) \neq \infty$, alors le résidu du mode p_i est $a.E(p_i)$. Il en résulte :

- 1) p_i est proche d'un mode de $E(p) \Rightarrow E(p_i)$ élevé d'où une grande contribution du mode correspondant dans la réponse $s(t)$. Le mode p_i est dit **excité** ou **sensibilisé** par $e(t)$. **Ce mode est alors un mode dominant pour l'entrée $e(t)$.**
- 2) p_i est proche d'un zéro de $E(p) \Rightarrow E(p_i)$ petit d'où une faible contribution du mode dans $s(t)$. On dit que le mode est **désensibilisé** par $e(t)$.

2.2. Réponse harmonique d'un système linéaire

2.2.1 Analyse harmonique

L'analyse harmonique est l'une des méthodes les plus anciennes et les plus riches de la physique : elle s'applique tant en acoustique qu'en métallurgie, en théorie des réseaux...

La base en est la décomposition d'une fonction périodique en série de Fourier.

Ce qui appliqué à $e(t)$, donne :

$$e(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\omega t + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\omega t \text{ avec :}$$

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} e(t).dt \quad ; \quad a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} e(t).\cos n\omega t.d t \quad ; \quad b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} e(t).\sin n\omega t.d t$$

ce qui peut encore s'écrire :

$$e(t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos(n\omega t + \varphi_n) \quad \text{avec : } c_n^2 = a_n^2 + b_n^2 \quad \text{et} \quad \tan \varphi_n = -\frac{b_n}{a_n}$$

D'après la propriété de linéarité la réponse aux entrées élémentaires $c_n \cos(n\omega t + \varphi_n)$ détermine donc, par superposition, la réponse globale $e(t)$.

2.2.2. Gain et phase complexes

Si le système est stable (pas de pôles à partie réelle positive ou nulle), on peut alors faire $p = j\omega$ dans la fonction de transfert :

$$S(j\omega) = H(j\omega).E(j\omega)$$

où $H(j\omega)$ peut s'écrire : $H(j\omega) = A.e^{j\Phi(\omega)}$ A et $\Phi(\omega)$ étant le gain et la phase complexes. La réponse en régime permanent à $e_0.\sin\omega t$ étant $s_0.\sin(\omega t + \varphi)$, il en résulte :

$$\boxed{\frac{s_0}{e_0} = A(\omega)} \quad \text{et} \quad \boxed{\varphi = \Phi(\omega)}$$

On peut alors, comme nous l'avons déjà dit, construire expérimentalement le lieu de transfert d'un système physique par analyse harmonique.

2.2.3. Gain statique. Bande passante

Tous les systèmes physiques sont des filtres passe-bas. Si la fonction de transfert ne contient pas d'intégration, c'est-à-dire pas de terme en $1/p$ ou en $1/p^\alpha$, alors :

$$H(0) = H(p)|_{p=0} = K$$

K est appelé le gain statique du système ou constante de boucle pour un système en boucle fermée. Il est alors possible de définir une bande de fréquences (ou de pulsations) pour laquelle le rapport des gains $H(j\omega)/H(0)$ reste inférieur à une valeur donnée. C'est la **bande passante**, bande de fréquences à l'intérieur de laquelle l'atténuation du signal reste limitée à une valeur définie. On définit :

$$\text{une bande passante à -3 dB : } \forall \omega \in \text{BP} \quad \frac{A(\omega)}{K} \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$$

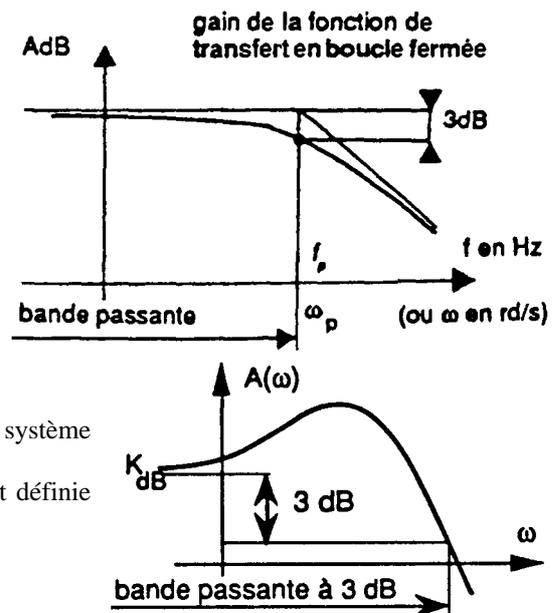
$$\text{ou une bande passante à -6 dB : } \forall \omega \in \text{BP} \quad \frac{A(\omega)}{K} \leq \frac{1}{2}$$

Pour une courbe de gain sans intégration ne présentant pas de maximum la bande passante est définie ci-contre.

La bande passante est donc une fréquence $\text{BP} = f_p$. Elle s'exprime donc en Hz. Le tableau suivant donne l'expression mathématique de la bande passante à 3 dB pour une commande en BF du premier ou du bande second ordre.

Remarques

- 1) la bande passante à -3 dB représente une atténuation limitée à moins de 30 % (50 % pour une bande passante à -6 dB).
- 2) bande passante ne peut être définie en chaîne directe pour un système avec une intégration.
- 3) pour un système présentant une résonance la bande passante est définie de la manière suivante :



Bande passante et rapidité

Pour un système du premier ordre la bande passante est égale à la fréquence de coupure f . Or le temps de réponse à 5 % étant égal à $3T$ il en résulte que le temps de réponse est inversement proportionnel à la bande passante. Cette propriété peut s'énoncer et se généraliser sous la forme suivante :

Plus la bande passante sera large, plus le système sera capable de suivre des entrées rapides ou de réagir rapidement pour compenser une perturbation. Cette aptitude à suivre des entrées rapides (ou des fréquences élevées) caractérise une propriété appelée "raideur de l'asservissement".

Gain et Bande Passante

Pour un système à retour unitaire il résulte de la fonction de transfert que $H(p) \rightarrow 1$ quand $K \rightarrow \infty$. En conclusion, sauf pour des systèmes particuliers et pour K assez grand on a alors la propriété suivante :

La bande passante augmente avec le gain K .

2.2.4 Résonance

Si $A(\omega)$ admet un maximum on dit que le système présente une résonance pour la pulsation de résonance ω_R (cas des systèmes du second ordre pour $z < 0,707$). Pour cette pulsation l'amplitude de la sortie, supérieure à celle de l'entrée passe par un maximum.