PRÉCISION DES SYSTÈMES LINÉAIRES

1. Généralité

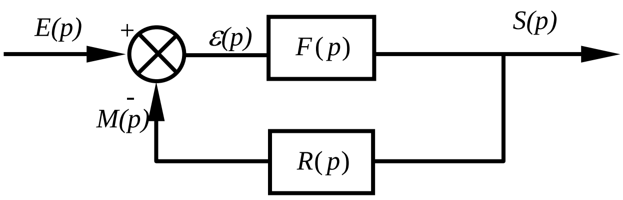
Le rôle d'un système asservi est de suivre au mieux une loi déterminée en général par l'entrée e(t). Un système est jugé par sa **stabilité**, par sa **rapidité** et par la **précision** avec laquelle il suit la loi d'entrée.
Les erreurs sont dues à la fois, aux variations de l'entrée mais aussi aux effets des perturbations. On distingue deux types d'écarts ou d'erreurs.

L'écart en régime permanent : c'est l'écart entre la sortie et la loi d'entrée une fois que le régime permanent est établi. On soumet alors le système à trois entrées canoniques :

- Entrée échelon, on parle alors d'écart indiciel, ou écart statique, noté ε_S ;
- Entrée rampe, qui donne l'écart de traînage ε_T ou l'écart de poursuite ε_P ;
- Entrée accélération, on parle d'écart en accélération ε_A.

L'écart en régime transitoire : c'est l'écart instantané entre la sortie et l'entrée lors de la phase transitoire suivant l'application de l'entrée ou après une perturbation (non développé ici, voir cours sur les dépassements des systèmes du second ordre).

Dans la suite de l'étude, nous supposerons comme dans le chapitre précédent, que le système étudié est mis sous la forme d'un système dont la fonction de transfert en boucle ouverte peut s'écrire :



$$H_O(p) = F(p).R(p) = \frac{K.N(p)}{p^\alpha D(p)} \quad \text{avec} \begin{cases} N(0)=1 \quad D(0)=1 \\ \alpha \geq 0 = \text{classe} \\ K = \text{gain statique} \end{cases}$$

2. Ecart en régime permanent

4.1. Définition

L'écart en régime permanent est la limite quand t tend vers l'infini de la différence entre l'entrée et la sortie *e(t) - s(t)***.**
Cette définition n'est bien sûr valable que si l'entrée et la sortie du système sont des grandeurs comparables.
Par exemple, dans la cas d'un moteur électrique, l'entrée est la tension de commande et la sortie est la vitesse de rotation de l'arbre moteur. La différence de ces deux grandeurs n'a pas de sens.
C'est pour cette raison que nous mesurerons l'écart entre *e(t)* et *m(t),* où *m(t)* est la mesure de *s(t).*
Un système sera précis si cet écart tend vers 0, c'est-à-dire que la sortie tend vers la valeur spécifiée de l'entrée.

Un peu de calcul…

$$\mathcal{E}(p) = E(p) - M(p) = E(p) - H_O(p)\mathcal{E}(p) \qquad \Rightarrow \mathcal{E}(p) = \frac{1}{1+H_O(p)}E(p) = \frac{1}{1+\dfrac{K.N(p)}{p^\alpha D(p)}}E(p)$$

En mettant au même dénominateur, il vient : $\mathcal{E}(p) = \dfrac{p^\alpha.D(p)}{p^\alpha.D(p)+K.N(p)}.E(p)$

Si nous supposons pour la suite que le système est stable, donc nous pouvons utilisez le théorème de la valeur finale :

$$\boxed{\mathcal{E}(\infty) = \lim_{p\to 0} \frac{p^{\alpha+1}.D(p)}{p^\alpha.D(p)+K.N(p)}.E(p)}$$

On le voit alors que l'écart en régime permanent dépend de la nature de l'entrée mais aussi de la fonction de transfert en boucle ouverte. Nous allons donc étudier cette écart en fonction des entrées types (échelon, rampe, accélération).

4.2. Réponse à un échelon : écart indiciel ou écart statique ε_S

L'écart statique est défini pour une entrée échelon $e(t) = a.u(t) \quad \Rightarrow \quad E(p) = \dfrac{a}{p}$.

En reprenant l'expression précédente, il vient : $\varepsilon_S = \lim\limits_{p\to 0} \dfrac{p^{\alpha+1}.D(p)}{p^{\alpha}.D(p)+K.N(p)}.\dfrac{a}{p} = \lim\limits_{p\to 0} \dfrac{a.p^{\alpha}}{p^{\alpha}+K}$

La précision est fonction de la classe du système.

a) système sans intégration (de classe $\alpha = 0$)

$$\boxed{\varepsilon_S = \lim_{p\to 0} \frac{a.p^0}{p^0+K} = \frac{a}{1+K}}$$

b) système avec intégrations (de classe $\alpha > 0$)

$$\boxed{\varepsilon_S = \lim_{p\to 0} \frac{a.p^{\alpha}}{p^{\alpha}+K} = 0}$$

4.3. Réponse à une rampe : écart de poursuite ε_P ou écart de traînage ε_T

L'écart de poursuite est l'erreur entre la sortie et une entrée de type rampe $e(t) = a.t.u(t) \quad \Rightarrow \quad E(p) = \dfrac{a}{p^2}$

Ce qui entraîne : $\varepsilon_S = \lim\limits_{p\to 0} \dfrac{p^{\alpha+1}.D(p)}{p^{\alpha}.D(p)+K.N(p)}.\dfrac{a}{p^2} = \lim\limits_{p\to 0} \dfrac{a.p^{\alpha-1}}{p^{\alpha}+K}$

a) système sans intégration (de classe $\alpha = 0$)

$$\boxed{\varepsilon_P = \lim_{p\to 0} \frac{a}{p.(p^{\alpha}+K)} = +\infty}$$

b) système avec une intégration (de classe $\alpha = 1$)

$$\boxed{\varepsilon_P = \lim_{p\to 0} \frac{a}{p+K} = \frac{a}{K}}$$

c) système avec plusieurs intégrations (de classe $\alpha > 1$)

$$\boxed{\varepsilon_P = \lim_{p\to 0} \frac{a.p^{\alpha-1}}{p^{\alpha}+K} = 0}$$

4.4. Réponse à une entrée parabolique : écart d'accélération ε_A

L'écart d'accélération est obtenu avec une entrée accélération : $e(t) = a.t^2.u(t) \quad \Rightarrow \quad E(p) = \dfrac{2a}{p^3}$.

Par analogie avec l'étude précédente, on déduit la précision du système en fonction du nombre d'intégrations dans la boucle.

a) système de classe $\alpha < 2$

$$\boxed{\varepsilon_A = \lim_{p\to 0} \frac{2ap^{\alpha-2}}{p^\alpha + K} = +\infty}$$

b) système de classe $\alpha = 2$

$$\boxed{\varepsilon_A = \lim_{p\to 0} \frac{2a}{p^2 + K} = \frac{2a}{K}}$$

c) système de classe $\alpha > 2$

$$\boxed{\varepsilon_A = \lim_{p\to 0} \frac{2ap^{\alpha-2}}{p^\alpha + K} = 0}$$

3. Pour résumer…

entrée	Classe du système			
	Classe 0, pas d'intégration	Classe 1, 1 intégration	Classe 2 2 intégrations	classe >2
Entrée en échelon	$\varepsilon_S = \dfrac{a}{1+K}$	$\varepsilon_S = 0$	$\varepsilon_S = 0$	$\varepsilon_S = 0$
Entrée rampe	$\varepsilon_P = +\infty$	$\varepsilon_P = \dfrac{a}{K}$	$\varepsilon_P = 0$	$\varepsilon_P = 0$
Entrée parabolique	$\varepsilon_A = +\infty$	$\varepsilon_A = +\infty$	$\varepsilon_A = \dfrac{2a}{K}$	$\varepsilon_A = 0$

A retenir :

- Une **intégration** dans la boucle ouverte **annule l'écart statique**.
- L'écart diminue lorsque la constante de gain statique *K* augmente.
- Attention aux **problèmes de stabilité** car, s'il suffit de rajouter une intégration pour que le système soit précis, en revanche chaque intégration ajoutée déphase également de -90° : le système risque fort de devenir instable.

4. Effet d'une perturbation sur la précision

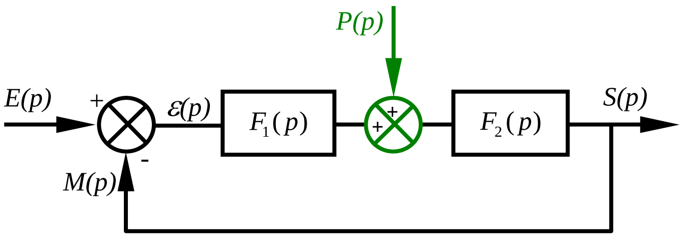
4.1. Problème

Le problème consiste à évaluer l'effet de la perturbation suivant l'endroit où elle est placée dans la boucle. Considérons une perturbation *p(t)* de transformée *P(p)*, placée comme indiqué sur le schéma.

On pose :

$$F_1(p)=\frac{K_1.N_1(p)}{p^{\alpha_1}D_1(p)} \text{ et } F_2(p)=\frac{K_2.N_2(p)}{p^{\alpha_2}D_2(p)}$$

$$\begin{cases} N_i(0)=1 \quad D_i(0)=1 \\ \alpha_i \geq 0 = \text{classe} \\ K_i = \text{gain statique} \end{cases}$$



4.2. Un peu de calcul…

$$\mathcal{E}(p)=E(p)-S(p)=E(p)-F_2(p).\left(F_1(p).\mathcal{E}(p)-P(p)\right) \quad \Rightarrow \mathcal{E}(p)\left(1+F_1(p).F_2(p)\right)=E(p)+F_2(p).P(p)$$

D'où : $\boxed{\mathcal{E}(p)=\frac{1}{1+F_1(p).F_2(p)}E(p)+\frac{F_2(p)}{1+F_1(p).F_2(p)}.P(p)=\mathcal{E}_{entrée}+\mathcal{E}_{perturbation}}$

4.3. Ecart statique

Considérons séparément l'écart statique dû à la perturbation *p(t) = a.u(t)*. Ce qui revient à supposer que *e(t) = 0*.

$$\mathcal{E}_{pert}(p)=\frac{F_2(p)}{1+F_1(p).F_2(p)}.P(p)$$

d'où l'écart statique dépendant de la perturbation : $\mathcal{E}s_{pert}=\lim_{p\to 0}\left(p\frac{F_2(p)}{1+F_1(p).F_2(p)}.P(p)\right)=\lim_{p\to 0}\left(p\frac{F_2(p)}{1+F_1(p).F_2(p)}.\frac{a}{p}\right)$

$$\mathcal{E}s_{pert}=\lim_{p\to 0}\left(\frac{\frac{K_2.N_2(p)}{p^{\alpha_2}D_2(p)}}{1+\frac{K_1.N_1(p)}{p^{\alpha_1}D_1(p)}.\frac{K_2.N_2(p)}{p^{\alpha_2}D_2(p)}}.a\right) \quad \text{d'où :} \quad \mathcal{E}s_{pert}=\lim_{p\to 0}\left(\frac{p^{\alpha_1}D_1(p).K_2.N_2(p)}{p^{\alpha_1}D_1(p).p^{\alpha_2}D_2(p)+K_1.N_1(p).K_2.N_2(p)}.a\right)$$

On obtient les deux cas suivants :

a) système de classe $\alpha_1=0$ $\boxed{\mathcal{E}s_{pert}=\lim_{p\to 0}\left(\frac{K_2.a}{p^{\alpha_2}+K_1.K_2}\right)}$

b) système de classe $\alpha_1>0$ $\boxed{\mathcal{E}s_{pert}=0}$

La précision du système vis à vis de la perturbation, ne dépend que du nombre d'intégrations situées en amont de la perturbation.
Il faut au moins une intégration placée en amont de la perturbation pour annuler l'écart statique.

4.4. Ecart de poursuite

La démarche est identique à ce que nous avons vu précédemment. Seules les intégrations situées en amont de la perturbation seront prises en compte.