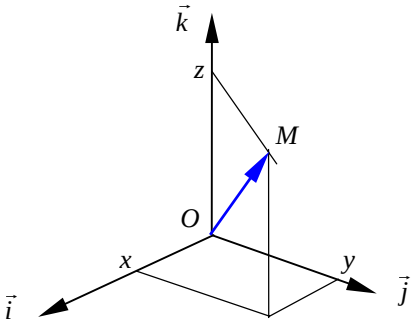
Cinématique du point

Coordonnées cartésiennes



Vecteur position : $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ $\left\|\overrightarrow{OM}\right\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

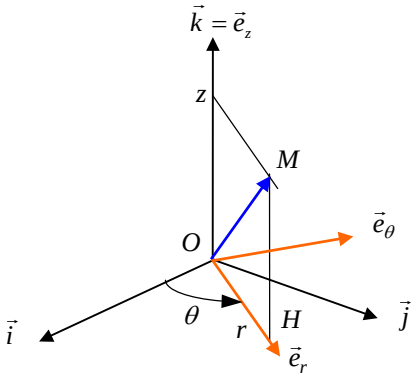
Vecteur vitesse du point M par rapport au référentiel R :

$$\vec{V}_{/R}^{M} = \left[\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right]_R = \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k}$$

Vecteur accélération du point M par rapport au référentiel R :

$$\vec{\Gamma}_{/R}^{M} = \left[\frac{d\vec{V}_{/R}^{M(t)}}{dt}\right]_R = \ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}\vec{j} + \ddot{z}\vec{k}$$

Coordonnées cylindriques



H est la projection orthogonale de M sur le plan $(O,\vec{i},\vec{j})$.

$\vec{e}_r$: vecteur unitaire issu de $\vec{i}$ par rotation d'un angle θ autour de l'axe $(O,\vec{e}_z)$

$\vec{e}_\theta$: vecteur unitaire directement orthogonal à $\vec{e}_r$ et appartenant au plan $(O,\vec{i},\vec{j})$.

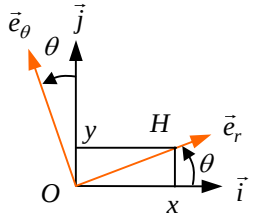
Les coordonnées cylindriques du point M dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ sont :

- $r = \overline{OH}$: mesure algébrique de $\overrightarrow{OH}$ sur l'axe $(O,\vec{e}_r)$
- $\theta = (\vec{i},\vec{e}_r)$: angle orienté par le vecteur unitaire $\vec{k}$ normal au plan $(\vec{i},\vec{e}_r)$
- z : projection orthogonale de $\overrightarrow{OM}$ sur l'axe $(O,\vec{e}_z)$.

La base $(\vec{e}_r,\vec{e}_\theta,\vec{e}_z)$ est orthonormée directe.

Le vecteur position du point M s'écrit donc dans cette base : $\overrightarrow{OM} = r\vec{e}_r + z\vec{e}_z$ Et sa norme devient : $\left\|\overrightarrow{OM}\right\| = \sqrt{r^2 + z^2}$

Relation entre le système de coordonnées cylindriques et cartésiennes



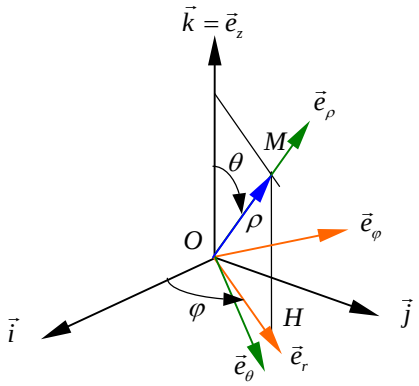
$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ z = z \end{cases} \text{ et } \begin{cases} \vec{e}_r = \cos\theta\vec{i} + \sin\theta\vec{j} \\ \vec{e}_\theta = -\sin\theta\vec{i} + \cos\theta\vec{j} \end{cases}$$

Vecteur vitesse du point M par rapport au référentiel R : $\vec{V}_{/R_0}^{M} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta + \dot{z}\vec{e}_z$

Vecteur accélération du point M par rapport au référentiel R : $\vec{\Gamma}_{/R_0}^{M} = \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right)\vec{e}_r + \left(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}\right)\vec{e}_\theta + \ddot{z}\vec{e}_z$

Dérivation des vecteurs de la base : $\frac{d\vec{e}_r}{dt} = \dot{\theta}\vec{e}_\theta$; $\frac{d\vec{e}_\theta}{dt} = -\dot{\theta}\vec{e}_r$; $\frac{d\vec{e}_z}{dt} = \vec{0}$

Coordonnées sphériques



H est la projection orthogonale du point M sur le plan $(O,\vec{i},\vec{j})$.

$\vec{e}_r$: vecteur unitaire issu de $\vec{i}$ par rotation d'un angle φ autour de l'axe $(O,\vec{e}_z)$

$\vec{e}_\varphi$: vecteur unitaire directement orthogonal à $\vec{e}_r$ et appartenant au plan $(O,\vec{i},\vec{j})$

$\vec{e}_\rho$: vecteur unitaire issu de $\vec{e}_z$ par rotation d'un angle θ autour de l'axe $(O,\vec{e}_\varphi)$

$\vec{e}_\theta$: vecteur unitaire issu de $\vec{e}_r$ par rotation d'un angle θ autour de l'axe $(O,\vec{e}_\varphi)$.

La base $(\vec{e}_\rho,\vec{e}_\theta,\vec{e}_\varphi)$ est orthonormée directe.

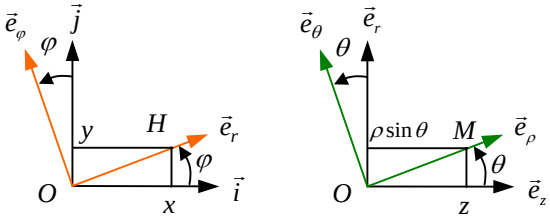
Les coordonnées sphériques du point M sont :

- $\rho=\overline{OM}$: mesuré sur l'axe $(O,\vec{e}_\rho)$
- $\theta=(\vec{e}_z,\vec{e}_\rho)$: angle orienté par le vecteur unitaire $\vec{e}_\varphi$
- $\varphi=(\vec{i},\vec{e}_r)$: angle orienté par vecteur unitaire $\vec{e}_z$

Le vecteur position s'écrit donc dans cette base : $\overrightarrow{OM}=\rho\vec{e}_\rho$

Relation entre le système de coordonnées cartésiennes et sphériques

Nous avons ici trois relations qui s'obtiennent en projetant $\overline{OM}=\rho$ sur les axes $(O,\vec{i})$, $(O,\vec{j})$ et $(O,\vec{k})$:

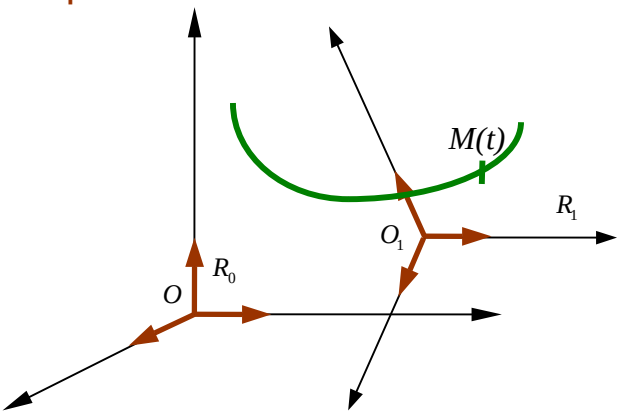


$$\begin{cases} x=\rho\sin\theta\cos\varphi \\ y=\rho\sin\theta\sin\varphi \\ z=\rho\cos\theta \end{cases}$$

Formule de la base mobile : $\left[\frac{d\vec{u}(t)}{dt}\right]_{R_0}=\left[\frac{d\vec{u}(t)}{dt}\right]_{R_1}+\vec{\Omega}_{(R_1/R_0)}\wedge\vec{u}(t)$

Les expressions des vecteurs vitesse et accélération ne sont pas à connaître. Toutefois, il est bon de savoir les retrouver rapidement en utilisant la formule ci-dessus.

Composition de mouvement



Composition des vitesses : $\vec{V}^M_{R_0}=\vec{V}^M_{/R_1}+\vec{V}^M_{R_1/R_0}$

$\vec{V}^M_{/R_0}$ est appelée vitesse absolue, $\vec{V}^M_{/R_1}$ est appelée vitesse relative et $\vec{V}^M_{R_1/R_0}$ est appelée vitesse d'entraînement.

Composition des vecteurs rotation :

$$\vec{\Omega}_{R_2/R_0}=\vec{\Omega}_{R_2/R_1}+\vec{\Omega}_{R_1/R_0}$$

Composition des vecteurs accélération :

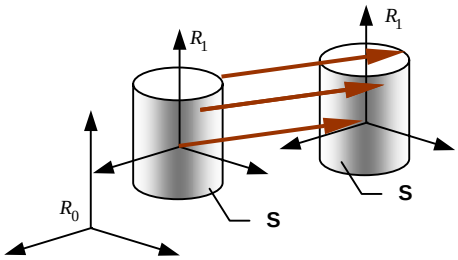
$$\vec{\Gamma}^M_{R_2/R_0}=\vec{\Gamma}^M_{R_2/R_1}+\vec{\Gamma}^M_{R_1/R_0}+\vec{\Gamma}^M_{Coriolis}$$

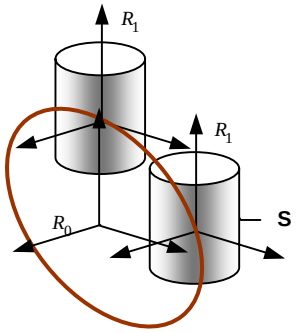
$\vec{\Gamma}^M_{R_2/R_0}=\left[\frac{d\left(\vec{V}^M_{R_2/R_0}\right)}{dt}\right]_{R_0}$: vecteur accélération absolue du point M, $\vec{\Gamma}^M_{R_2/R_1}=\left[\frac{d\left(\vec{V}^M_{R_2/R_1}\right)}{dt}\right]_{R_1}$: vecteur accélération relative du point M,

$\vec{\Gamma}^{M}_{R_1/R_0} = \left[\dfrac{d\left(\vec{V}^{M}_{R_1/R_0}\right)}{dt}\right]_{R_0}$: vecteur accélération d'entraînement du point *M*, $\vec{\Gamma}^{M}_{coriolis} = 2\vec{\Omega}_{(R_1/R_0)} \wedge \vec{V}^{M}_{R_2/R_1}$: vecteur accélération de Coriolis du point *M*.

CINÉMATIQUE DU SOLIDE

Solide en mouvement de translation rectiligne ou circulaire

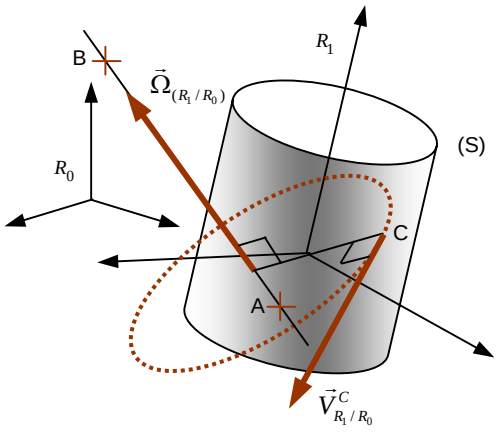




Paramétrage de la translation :

$$\vec{\Omega}_{(R_1/R_0)} = \vec{0} \;\; et \;\; \vec{V}^{M}_{R_1/R_0} = \overrightarrow{Cte} \quad \forall M \in S$$

Solide en mouvement de rotation

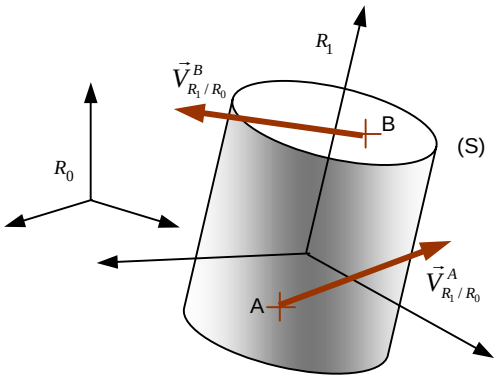


Un solide S est en rotation par rapport à un référentiel R_0 si et seulement si, il existe un point A tel que : $\vec{V}^{A}_{S/R_0} = \vec{0}$.

On remarque que la vitesse est nulle en n'importe quel point de l'axe de rotation.

En C la vitesse devient : $\vec{V}^{C}_{S/R_0} = \vec{\Omega}_{(R_1/R_0)} \wedge \overrightarrow{AC}$

Relation fondamentale, champ des vitesses des points d'un solide



$$\vec{V}^{B}_{S/R_0} = \vec{V}^{A}_{S/R_0} + \vec{\Omega}_{(S/R_0)} \wedge \overrightarrow{AB}$$

Remarque :
Cette relation n'est valable que si A et B appartiennent à un même solide.

Torseur cinématique

Pour simplifier l'écriture du vecteur rotation et du vecteur vitesse en un point, on les regroupe dans un nouvel opérateur que nous nommerons *torseur cinématique*, noté :

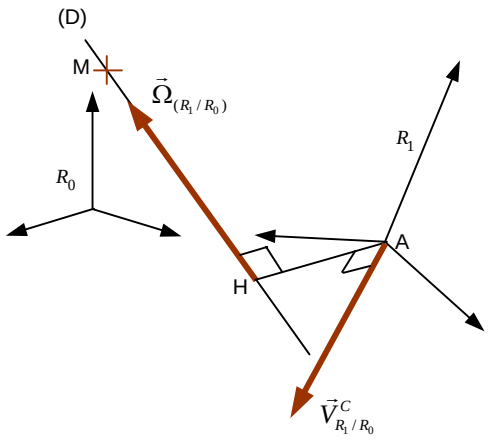
$$\left\{\mathcal{\vartheta}_{S/R_0}\right\}_A = \left\{\vec{\Omega}_{(S/R_0)}, \vec{V}^{A}_{S/R_0}\right\}$$

Le vecteur rotation $\vec{\Omega}_{(S/R_0)}$ est aussi appelé *résultante du torseur*. Le vecteur vitesse $\vec{V}^{A}_{S/R_0}$ est aussi appelé *moment du torseur*.

Point central - Axe central - Moment central

Un *point central* d'un torseur est un point de l'espace, où le moment du torseur a la même direction que la résultante.

L'*axe central* d'un torseur est la droite constituée par l'ensemble des points centraux (l'axe central n'existe que si la résultante du torseur n'est pas nulle existe : $\vec{\Omega}_{S/R} \neq \vec{0}$). L'axe central a même direction que la résultante du torseur.



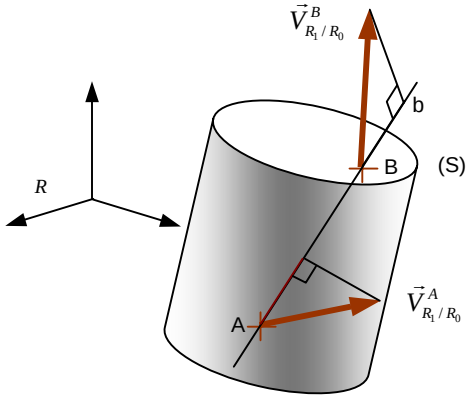
Supposons le torseur défini en un point *A* par :
$\left\{\mathcal{J}_{S/R_0}\right\}_A = \left\{\vec{\Omega}_{(S/R_0)}, \vec{V}^{A}_{S/R_0}\right\}$.

Alors le pied *H* de la perpendiculaire abaissée de A sur l'axe central (*D*) est défini par le vecteur :
$\overrightarrow{AH} = \dfrac{\vec{\Omega}_{(R_1/R_0)} \wedge \vec{V}^{A}_{S/R_0}}{\left\|\vec{\Omega}_{(R_1/R_0)}\right\|^2}$. Tout point *M* de (*D*) peut donc être défini par :
$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HM}$. Soit encore :

$$\boxed{\overrightarrow{AM} = \frac{\vec{\Omega}_{(R_1/R_0)} \wedge \vec{V}^{A}_{S/R_0}}{\left\|\vec{\Omega}_{(R_1/R_0)}\right\|^2} + \lambda\vec{\Omega}_{(R_1/R_0)}}$$ où λ est un réel.

Le *moment central* d'un torseur est le moment en un point de son axe central. Il a la même direction que l'axe central du torseur. L'axe central d'un torseur cinématique est aussi appelé *axe instantané de rotation*.

Équiprojectivité des vecteurs vitesse



avec : $\vec{u} = \dfrac{\overrightarrow{AB}}{\left\|\overrightarrow{AB}\right\|}$ il vient : $\Rightarrow \vec{u}.\vec{V}^{B}_{S/R} = \vec{u}.\vec{V}^{A}_{S/R}$

soit encore : $\boxed{\left\|\vec{V}^{B}_{S/R}\right\|\cos\left(\vec{V}^{B}_{S/R}, \overrightarrow{AB}\right) = \left\|\vec{V}^{A}_{S/R}\right\|\cos\left(\vec{V}^{A}_{S/R}, \overrightarrow{AB}\right)}$

La quantité $\left\|\vec{V}^{A}_{S/R}\right\|\cos\left(\vec{V}^{A}_{S/R}, \overrightarrow{AB}\right)$ correspond à la mesure algébrique de la projection du vecteur vitesse du point A sur la droite (*AB*), soit $\overline{Aa}$. De même : $\overline{Bb} = \left\|\vec{V}^{B}_{S/R}\right\|\cos\left(\vec{V}^{B}_{S/R}, \overrightarrow{AB}\right)$.

Donc les projections de ces deux vecteurs sur l'axe (*AB*) sont égales.

Centre instantané de rotation (CIR)

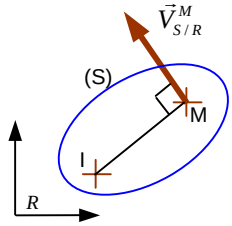
On considère maintenant que tous les mouvements des solides sont dans un même plan, c'est-à-dire qu'ils ne possèdent que trois degrés de liberté : une rotation selon la normale au plan et deux translations dans le plan.

Soit un point *M* appartenant à un solide (*S*) et animé d'une vitesse $\vec{V}^{M}_{S/R}$. On appelle centre instantané de rotation de (S) par rapport à *R*, le point *I*, si la vitesse de celui-ci est nulle à un instant donné.

$$\boxed{\vec{V}^{I}_{S/R} = \vec{0}}$$

Le point vérifiant la propriété ci-dessus n'est pas forcément le même à tout instant.

Propriété



Quelque soit le point M : $\vec{V}^{M}_{S/R} = \vec{V}^{I}_{S/R} + \vec{\Omega}_{S/R} \wedge \overrightarrow{IM}$

D'où : $\vec{V}^{M}_{S/R} = \vec{\Omega}_{S/R} \wedge \overrightarrow{IM}$

Le centre instantané de rotation est situé sur la normale au vecteur vitesse $\vec{V}^{M}_{S/R}$ issue de M.

8. Base et roulante

Base

On appelle la *base* du mouvement de (*S*) par rapport à un référentiel *R*, le lieu des centres instantanés de rotation I, exprimé dans le repère fixe (c'est-à-dire *R*).

Roulante

On appelle *roulante* du mouvement de (*S*) par rapport à *R*, le lieu des centres instantanés de rotation I, exprimé dans le repère mobile (c'est-à-dire lié à S). A tout instant, la roulante roule sans glisser sur la base.

Mouvement plan sur plan de trois plans

Soient trois repères, $R_1 : (O_1, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$, $R_2 : (O_2, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$ et $R_3 : (O_3, \vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_3)$ liés respectivement à trois solides S_1, S_2 et S_3. Supposons qu'au cours des mouvements de ces trois solides, les trois plans associés $P_1 : (O_1, \vec{x}_1, \vec{y}_1)$, $P_2 : (O_2, \vec{x}_2, \vec{y}_2)$ et $P_3 : (O_3, \vec{x}_3, \vec{y}_3)$ restent confondus, donc $\vec{z}_1 = \vec{z}_2 = \vec{z}_3 = \vec{z}$.

Posons : $\vec{\Omega}_{(R_2/R_1)} = \omega_{21}\vec{z}$; $\vec{\Omega}_{(R_3/R_2)} = \omega_{32}\vec{z}$; $\vec{\Omega}_{(R_1/R_3)} = \omega_{13}\vec{z}$

Notons : I_{21} Le centre instantané de rotation du mouvement du plan P_2 par rapport à P_1,
I_{32} Le centre instantané de rotation du mouvement du plan P_3 par rapport à P_2,
I_{13} Le centre instantané de rotation du mouvement du plan P_1 par rapport à P_3

On peut écrire alors que : $\vec{V}^{I_{21}}_{R_1/R_2} = \vec{0}$

En passant par le troisième repère : $\vec{V}^{I_{21}}_{R_1/R_3} + \vec{V}^{I_{21}}_{R_3/R_2} = \vec{0}$

En appliquant deux fois la formule de changement de point : $\vec{z} \wedge (\omega_{13}\overrightarrow{I_{13}I_{21}} + \omega_{32}\overrightarrow{I_{32}I_{21}}) = \vec{0}$

Donc les deux vecteurs $\overrightarrow{I_{13}I_{21}}$ et $\overrightarrow{I_{32}I_{21}}$ sont colinéaires.

Les trois centres instantanés de rotation I_{21}, I_{23} et I_{13} sont alignés.