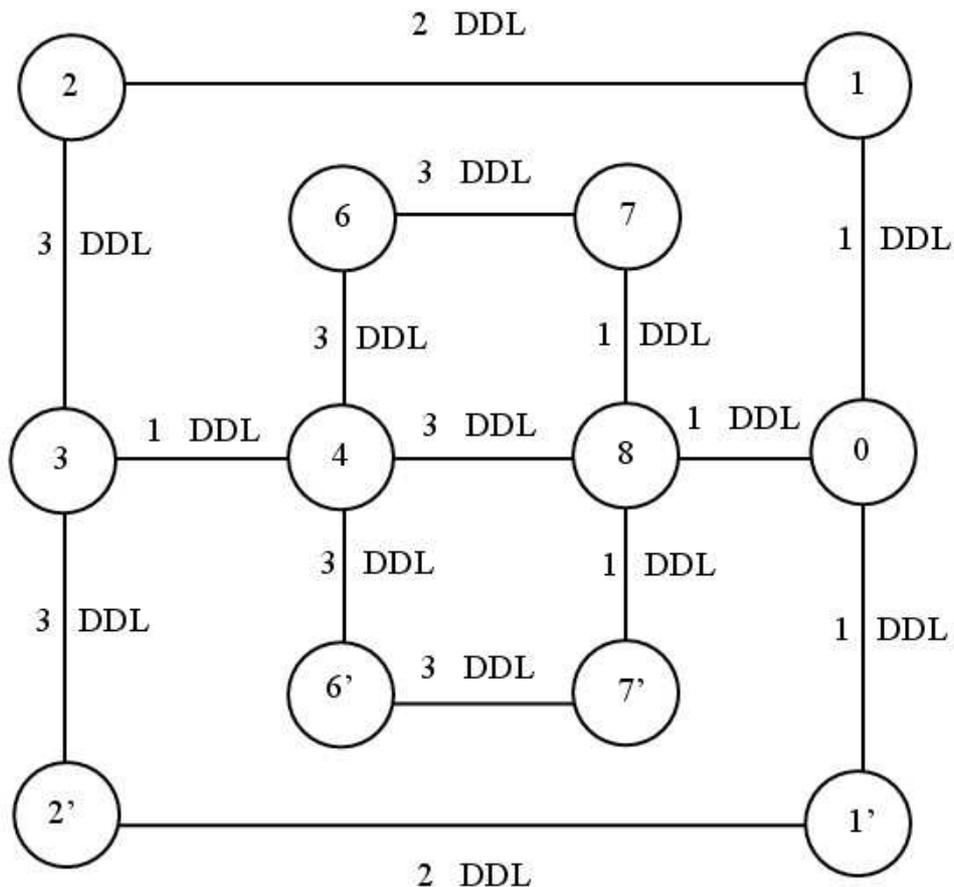


CORRIGE
DISPOSITIF D'ORIENTATION DE PALE D'HELICOPTERES

Partie 1 : Etude spatiale du système complet.

1) *Grphe de structure avec les DDL de chaque liaison.*



2) *Ecrire les torseurs cinématiques des différentes liaisons.*

$$\{\mathcal{P}_{1/0}\} = \begin{matrix} G \\ \left\{ \begin{matrix} \omega_{1/0} \cdot \vec{z} \\ \vec{0} \end{matrix} \right\} \end{matrix} \quad \{\mathcal{P}_{2/1}\} = \begin{matrix} \forall_M \\ \left\{ \begin{matrix} \vec{0} \\ V_{2/1} \cdot \vec{y}_1 \end{matrix} \right\} \end{matrix} \quad \{\mathcal{P}_{3/2}\} = \begin{matrix} F \\ \left\{ \begin{matrix} \omega_{3/2} \cdot \vec{z} \\ \vec{0} \end{matrix} \right\} \end{matrix} \quad \{\mathcal{P}_{0/3}\} = \begin{matrix} E \\ \left\{ \begin{matrix} \omega_{0/3} \cdot \vec{z} \\ V_{0/3} \cdot \vec{y} \end{matrix} \right\} \end{matrix}$$

3) *Ecrire la fermeture cinématique au point O.*

On déplace tous les torseurs au point O.

$$\{\mathcal{P}_{1/0}\} = \begin{matrix} o \\ \left\{ \begin{matrix} \omega_{1/0} \cdot \vec{z} \\ -g \cdot \omega_{1/0} \cdot \vec{y} \end{matrix} \right\} \end{matrix} \quad \{\mathcal{P}_{3/2}\} = \begin{matrix} o \\ \left\{ \begin{matrix} \omega_{3/2} \cdot \vec{z} \\ \omega_{3/2} \cdot (f \cdot \vec{x} - g \cdot \vec{y}) \end{matrix} \right\} \end{matrix} \quad \{\mathcal{P}_{0/3}\} = \begin{matrix} o \\ \left\{ \begin{matrix} \omega_{0/3} \cdot \vec{z} \\ e \cdot \omega_{0/3} \cdot \vec{x} + V_{0/3} \cdot \vec{y} \end{matrix} \right\} \end{matrix}$$

La fermeture cinématique au point O s'écrit :

$$\{\mathcal{P}_{0/3}\} + \{\mathcal{P}_{3/2}\} + \{\mathcal{P}_{2/1}\} + \{\mathcal{P}_{1/0}\} = \{0\}$$

En projetant résultante et moment au point O dans la base $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$:

$$\begin{aligned} \bar{x} &: 0 + e.\omega_{0/3} + f.\omega_{3/2} + 0 + 0 = 0 \\ \bar{y} &: V_{0/3} + 0 - g.\omega_{3/2} + V_{2/1} - g.\omega_{1/0} = 0 \\ \bar{z} &: 0 + \omega_{0/3} + \omega_{3/2} + 0 + \omega_{1/0} = 0 \end{aligned}$$

4) En déduire l'indice de mobilité cinématique, qui définit le nombre de paramètres indépendants permettant de fixer de manière unique la position de chacune des pièces.

Rang du système d'équations de l'étude cinématique : $r_c = 3$

Nombres d'inconnues de l'étude cinématique : $I_c = 5$

La mobilité cinématique m_c vaut :

$$m_c = I_c - r_c = 5 - 3 = 2$$

5) Expliquer la nécessité d'utiliser deux vérins.

La mobilité cinématique est égale à 2 donc la seule connaissance de la vitesse de translation de la tige de vérin 2 par rapport au corps 1, ne permet pas d'imposer le mouvement du plateau cyclique non tournant 3.

On rajoute un deuxième vérin :

Corps 1' en liaison pivot d'axe $G' \bar{z}$ avec le bâti 0.

Corps 1' en liaison pivot glissant d'axe $G' \bar{y}_1'$ avec la tige 2'.

Tige 2' en liaison pivot d'axe $F' \bar{z}$ avec la pièce 3.

Données

NB : l'indice ' caractérise la partie située à gauche de l'axe $O \bar{y}$.

$$\overrightarrow{OG'} = -g.\bar{x}$$

$$\overrightarrow{OF'} = -g.\bar{x} + f'(t).\bar{y}_1'$$

6) Construire le schéma cinématique du dispositif avec deux vérins.

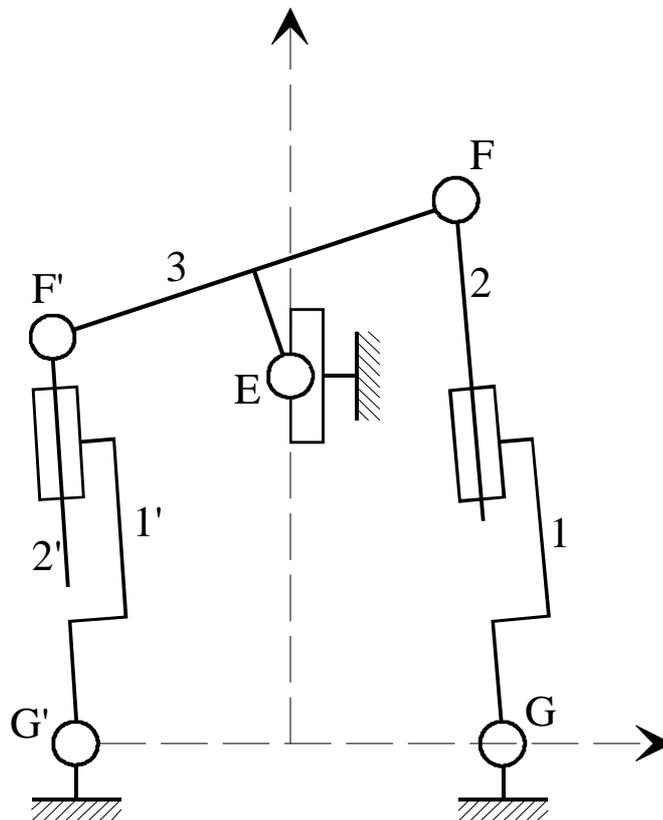


Figure 5 bis

Remarque les deux vérins, pour une position quelconque, ne sont pas colinéaires.

7) *Ecrire les fermetures cinématiques du dispositif complet en tenant compte des deux vérins.*

La fermeture cinématique de la deuxième chaîne (**0**, **1'**, **2'**, **3**, **0**) au point O s'écrit :

$$\{\mathcal{P}_{0/3}\} + \{\mathcal{P}_{3/2'}\} + \{\mathcal{P}_{2'/1'}\} + \{\mathcal{P}_{1'/0}\} = \{0\}$$

En projetant résultante et moment au point O dans la base $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$:

$\vec{x} : 0 + e.\omega_{0/3} + f.\omega_{3/2'} + 0 + 0 = 0$
$\vec{y} : V_{0/3} + 0 + g.\omega_{3/2'} + V_{2'/1'} + g.\omega_{1'/0} = 0$
$\vec{z} : 0 + \omega_{0/3} + \omega_{3/2'} + 0 + \omega_{1'/0} = 0$

8) *En déduire l'indice de mobilité du mécanisme complet.*

Rang du système d'équations de l'étude cinématique : $r_c = 2 \cdot 3 = 6$

Nombres d'inconnues de l'étude cinématique : $I_c = 5 + 3 = 8$

La mobilité cinématique m_c vaut :

$m_c = I_c - r_c = 8 - 6 = 2$

Commenter la valeur trouvée.

La mobilité cinématique est égale à 2 donc il faut fixer deux paramètres (par exemple, vitesse de translation de la tige de vérin par rapport au corps, pour les deux vérins) pour imposer le mouvement du plateau cyclique non tournant **3**.

9) *On étudie la loi entrée-sortie du point de vue cinématique autour de la position de référence et on fixe :*

$$\vec{V}(M \in 2/1) \cdot \vec{y} = v = V_{2/1}$$

$$\vec{V}(M \in 2'/1') \cdot \vec{y} = -v = V_{2'/1'}$$

Déterminer $\vec{V}(E \in 3/0)$ et $\vec{\Omega}_{3/0}$.

En résolvant le système de 6 équations précédent, on trouve :

$\vec{V}(E \in 3/0) = \vec{0}$

$\vec{\Omega}_{3/0} = \frac{v}{g} \cdot \vec{z}$
--

Le mouvement de **3** par rapport à **0** est donc un mouvement de rotation d'axe $E \vec{z}$.

10) *Les pales du rotor principal appliquent par l'intermédiaire de biellettes et du plateau des actions mécaniques sur le solide 3 que l'on modélise par :*

$$\{\mathcal{S}_{ext \rightarrow 3}\} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{F}_{ext} = F_x \cdot \vec{x} + F_x \cdot \vec{y} \\ \vec{M}_{E, ext \rightarrow 3} = M_E \cdot \vec{z} \end{array} \right\}$$

Déterminer l'effort exercé par chacun des vérins que l'on notera :

$$\{\mathcal{S}_{fluide \rightarrow 2}\}_G = \left\{ \begin{array}{l} \vec{F}_2 = F_2 \cdot \vec{y} \\ \vec{0} \end{array} \right\}$$

$$\{\mathcal{S}_{fluide \rightarrow 2'}\}_{G'} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{F}_{2'} = F_2 \cdot \vec{y} \\ \vec{0} \end{array} \right\}$$

- On isole les solides **1** et **2** :
Bilan des actions mécaniques

- glisseur $_G \{ \mathcal{S}_{0 \rightarrow 1+2} \}$

- glisseur $_F \{ \mathcal{S}_{3 \rightarrow 1+2} \}$

Ensemble **1** et **2** soumis à 2 glisseurs donc : $\vec{F}_{2 \rightarrow 3} \wedge \vec{y} = \vec{0}$ car $\overline{GF} \wedge \vec{y} = \vec{0}$

- De même, on isole les solides **1'** et **2'**, et on montre : $\vec{F}_{2' \rightarrow 3} \wedge \vec{y} = \vec{0}$
- En isolant la tige **2**, et en écrivant le théorème de la résultant statique en projection sur \vec{y} , on montre :

$$\vec{F}_{2 \rightarrow 3} \cdot \vec{y} = F_2 \text{ et } \vec{F}_{2 \rightarrow 3} \wedge \vec{y} = \vec{0} \text{ d'où : } \vec{F}_{2 \rightarrow 3} = F_2 \vec{y}$$

$$_F \{ \mathcal{S}_{2 \rightarrow 3} \} = _F \{ \mathcal{S}_{\text{fluide} \rightarrow 2} \}$$

- De même en isolant la tige **2'**, et en écrivant le théorème de la résultant statique en projection sur \vec{y} , on montre :

$$_{F'} \{ \mathcal{S}_{2' \rightarrow 3} \} = _{F'} \{ \mathcal{S}_{\text{fluide} \rightarrow 2'} \}$$

- On isole le solide **3** :

Bilan des actions mécaniques

- $_E \{ \mathcal{S}_{\text{ext} \rightarrow 3} \}$

- glisseur $_F \{ \mathcal{S}_{2 \rightarrow 3} \} = _F \{ \mathcal{S}_{\text{fluide} \rightarrow 2} \}$

- glisseur $_{F'} \{ \mathcal{S}_{2' \rightarrow 3} \} = _{F'} \{ \mathcal{S}_{\text{fluide} \rightarrow 2'} \}$

- $\{ \mathcal{S}_{0 \rightarrow 3} \}$ avec $\vec{F}_{0 \rightarrow 3} \cdot \vec{y} = 0$ car $L_{0/3}$: linéaire annulaire d'axe E \vec{y} .

avec $\vec{M}_{E,0 \rightarrow 3} \cdot \vec{z} = 0$

En écrivant le théorème de la résultante statique en projection sur \vec{y} :

$$(E_1) : F_2 + F_{2'} + F_y = 0$$

En écrivant le théorème du moment statique au point E en projection sur \vec{z} :

$$(E_2) : g \cdot F_2 - g \cdot F_{2'} + M_E = 0$$

En résolvant les deux équations notées (E₁) et (E₂), on détermine F_2 et $F_{2'}$:

$$F_2 = \frac{1}{2} \cdot \left[-F_y - \frac{M_E}{g} \right]$$

$$F_{2'} = \frac{1}{2} \cdot \left[-F_y + \frac{M_E}{g} \right]$$

Correction sujet SI CCP 2005

Q 11 Ecrire les équations scalaires obtenues en appliquant le théorème de la résultante statique à l'élément de courroie étudié.

$$\vec{dF}(\text{poulie} \rightarrow \text{câble}) = \vec{dN} + \vec{dT}$$

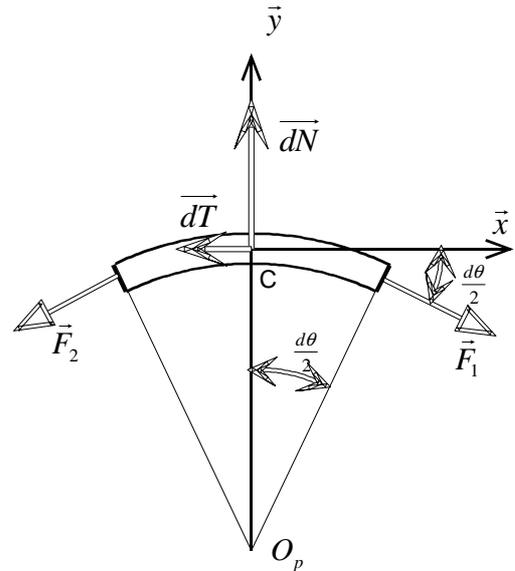
$$\vec{dN} = \|dN\| \vec{y} \text{ et } \vec{dT} = -f_1 \|dN\| \vec{x}$$

Résultante sur (O, \vec{x}) :

$$-f_1 dN + (F + dF) \cos \frac{d\theta}{2} - F \cos \frac{d\theta}{2} = 0 \quad (1)$$

Résultante sur (O, \vec{y}) :

$$dN - (F + dF) \sin \frac{d\theta}{2} - F \sin \frac{d\theta}{2} = 0 \quad (2)$$



Q 12 En négligeant les éléments différentiels du second ordre et en considérant que $d\theta$ est très petit, montrer que les équations de la question précédente conduisent à l'équation différentielle $\frac{dF}{F} = f_1 d\theta$.

$$\cos \frac{d\theta}{2} \approx 1 ; \sin \frac{d\theta}{2} \approx \frac{d\theta}{2} \quad (1) \Rightarrow -f_1 dN + dF = 0 \quad (2) \Rightarrow dN - 2F \frac{d\theta}{2} - dF \frac{d\theta}{2} = 0$$

$dF \frac{d\theta}{2}$ est un élément différentiel du second ordre ; on le néglige

D'où : $dN - F d\theta = 0$ ce qui conduit avec (1) à : $\boxed{\frac{dF}{F} = f_1 d\theta}$

Q 13 Avec F qui varie de $\vec{F}_{cp \rightarrow \text{câble}}$ à $\vec{F}_{\text{cabine} \rightarrow \text{câble}}$ pour θ variant de 0 à π , montrer que l'on

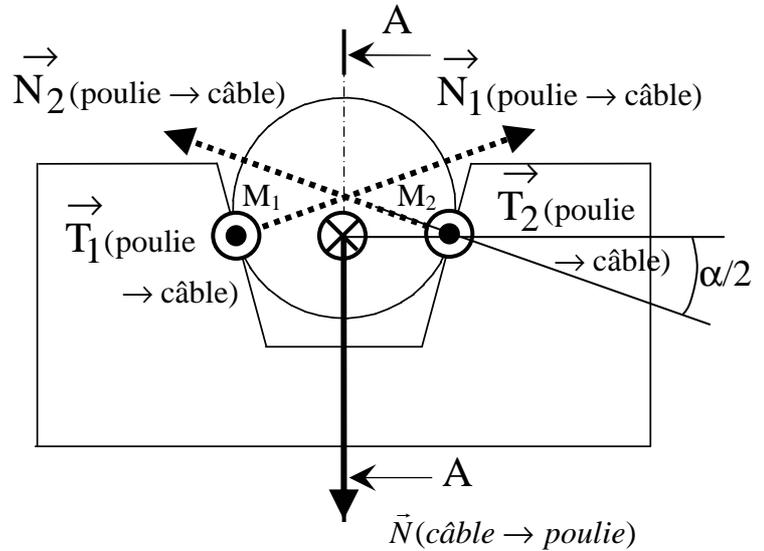
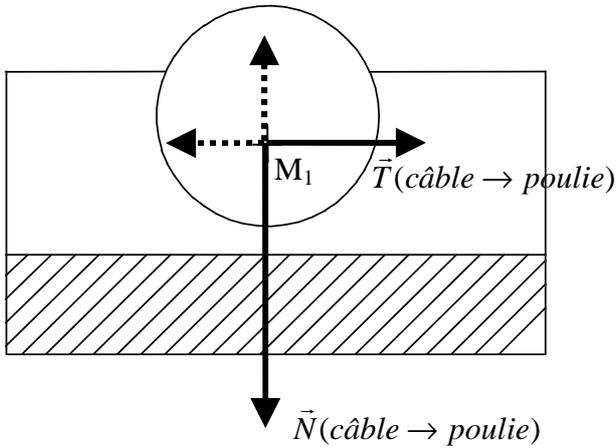
arrive à la relation $\frac{\|\vec{F}_{\text{cabine} \rightarrow \text{câble}}\|}{\|\vec{F}_{cp \rightarrow \text{câble}}\|} = e^{f_1 \pi}$.

Avec F qui varie de $\vec{F}_{cp \rightarrow \text{câble}}$ à $\vec{F}_{\text{cabine} \rightarrow \text{câble}}$ pour θ variant de 0 à π , on obtient :

$$\boxed{\frac{\|\vec{F}_{\text{cabine} \rightarrow \text{câble}}\|}{\|\vec{F}_{cp \rightarrow \text{câble}}\|} = e^{f_1 \pi}}$$

Q 14 Sur le document réponse 1, mettre en place les actions de contact normale et tangentielle en M_1 et M_2 de la poulie sur le câble, lorsque le câble est à la limite du glissement par rapport à la poulie.

Coupe A-A



Q 15 Déterminer $\mu = \frac{\|\vec{T}\|}{\|\vec{N}\|}$ où \vec{N} et \vec{T} sont les composantes normale et tangentielle de la résultante des actions de la poulie sur le câble, en fonction de f_1 et α .

$$\|\vec{T}_{1(p \rightarrow c)}\| = \|\vec{T}_{2(p \rightarrow c)}\| = f_1 \|\vec{N}_{1(p \rightarrow c)}\| = \frac{f_1 \|\vec{N}_{(c \rightarrow p)}\|}{2 \sin(\alpha/2)}$$

$$\|\vec{T}_{(p \rightarrow c)}\| = 2 \|\vec{T}_{1(p \rightarrow c)}\|$$

$$\mu = \frac{\|\vec{T}_{(p \rightarrow c)}\|}{\|\vec{N}_{(p \rightarrow c)}\|} = \frac{\|\vec{T}_{1(p \rightarrow c)}\|}{\|\vec{N}_{1(p \rightarrow c)}\|} = \frac{f_1}{\sin(\alpha/2)}$$

$$\boxed{\mu = \frac{f_1}{\sin(\alpha/2)}}$$

Q 16 En appliquant le principe fondamental de la dynamique à la cabine, puis au contrepoids, déterminer les actions $\vec{F}_{cp \rightarrow \text{câble}}$ et $\vec{F}_{\text{cabine} \rightarrow \text{câble}}$ du contrepoids et de la cabine sur les deux brins du câble. Les calculs se feront dans le cas de la montée de la cabine à l'accélération.

Le théorème de la résultante dynamique appliqué à l'ensemble cabine + charge en projection sur l'axe verticale (\vec{y}_0) donne lorsque la cabine est accélérée vers le haut :

$$F_{\text{câble} \rightarrow \text{cabine}} - m_c \cdot g - F = m_c \cdot \Gamma \quad (\Gamma > 0)$$

$$\text{donc : } F_{\text{cabine} \rightarrow \text{câble}} = -m_c (\Gamma + g) - F$$

Le théorème de la résultante dynamique appliqué au contrepoids en projection sur l'axe verticale (\vec{y}_0) donne lorsque le contrepoids est accélérée vers le bas :

$$F_{\text{câble} \rightarrow cp} - m_p g = -m_p \Gamma \quad (\Gamma > 0)$$

$$\text{donc : } F_{cp \rightarrow \text{câble}} = m_p (\Gamma - g)$$

Q 17 Déterminer, à partir des expressions précédentes, et du résultat de la question 13, l'expression de l'angle α pour que le câble ne glisse pas par rapport à la poulie.

$$\frac{\|\vec{F}_{\text{cabine} \rightarrow \text{câble}}\|}{\|\vec{F}_{\text{cp} \rightarrow \text{câble}}\|} = \frac{m_c(\Gamma + g) + F}{m_p(g - \Gamma)} \quad \text{on obtient :}$$

$$\frac{m_c(\Gamma + g) + F}{m_p(g - \Gamma)} = e^{\mu\pi} = e^{\frac{f_1\pi}{\sin(\alpha/2)}} \Rightarrow \frac{f_1\pi}{\sin(\alpha/2)} = \ln\left(\frac{m_c(\Gamma + g) + F}{m_p(g - \Gamma)}\right)$$

$$\Rightarrow \sin(\alpha/2) = \frac{f_1\pi}{\ln\left(\frac{m_c(\Gamma + g) + F}{m_p(g - \Gamma)}\right)} \Rightarrow \alpha = 2 \arcsin \left[\frac{f_1\pi}{\ln\left(\frac{m_c(\Gamma + g) + F}{m_p(g - \Gamma)}\right)} \right]$$