

ÉCOLE NATIONALE DES PONTS ET CHAUSSEES,  
ÉCOLES NATIONALES SUPERIEURES DE L'AERONAUTIQUE ET DE L'ESPACE,  
DES TECHNIQUES AVANCEES, DES TELECOMMUNICATIONS,  
DES MINES DE PARIS, DES MINES DE SAINT-ETIENNE, DES MINES DE NANCY,  
DES TELECOMMUNICATIONS DE BRETAGNE.  
ÉCOLE POLYTECHNIQUE (FILIERE TSI)

CONCOURS D'ADMISSION 2007

SCIENCES INDUSTRIELLES

Filière : MP

Sujet mis à disposition des concours : ENSAE (Statistique), ENSTIM, TPE-EIVP, Cycle International

Durée de l'épreuve : 3 heures

L'usage de la calculatrice est autorisé

Cet énoncé comporte le sujet (5 pages numérotées de 1/5 à 5/5) et ses annexes (6 pages numérotées de 1/6 à 6/6). Le travail sera effectué sur le document-réponse de 12 pages fourni avec la copie. Un seul document-réponse est fourni au candidat. Le renouvellement de ce document en cours d'épreuve est interdit. Pour valider ce document-réponse, chaque candidat doit obligatoirement y inscrire à l'encre, à l'intérieur du rectangle d'anonymat situé en première page ses nom, prénoms (souligner le prénom usuel), numéro d'inscription et signature. Il est conseillé de lire la totalité de l'énoncé avant de commencer l'épreuve.

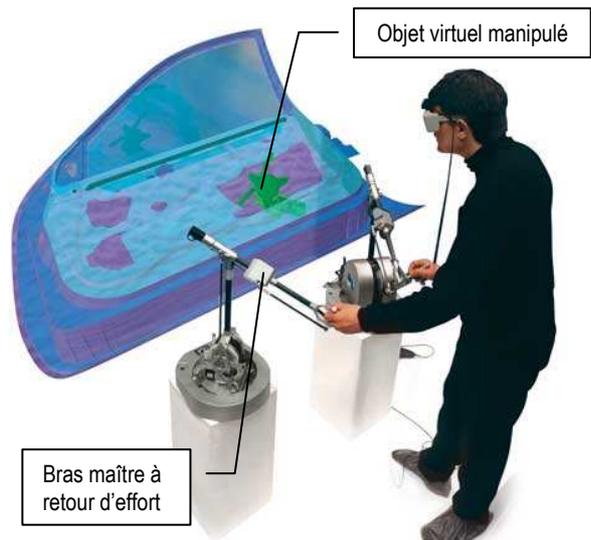
Les questions sont organisées au sein d'une progression logique caractéristique de la discipline, certaines questions étant partiellement dépendantes : Il est donc souhaitable de les traiter dans l'ordre. La rédaction des réponses sera la plus concise possible : on évitera de trop longs développements de calculs en laissant subsister les articulations du raisonnement.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

# Bras maître à retour d'effort de système de réalité virtuelle

La réduction des délais de conception, de mise au point des produits et de leurs procédés de fabrication est une exigence des entreprises industrielles sur les marchés à forte concurrence. Améliorant cette productivité, les outils de simulation informatique sont utilisés sur maquette numérique, dès la phase de conception sans faire appel à des prototypes physiques. Ainsi un avion est maintenant testé et simulé avant qu'il n'existe réellement. Ses futurs pilotes s'entraînent à son pilotage avant que le premier exemplaire ne vole. Dans l'industrie automobile gourmande d'opérations d'assemblage, les opérateurs peuvent tester et simuler des postes de travail avant même que le véhicule n'existe physiquement.

Parmi les outils actuels, le système à retour d'effort permet à son utilisateur d'interagir avec un environnement virtuel par l'intermédiaire du sens du toucher. Il se compose d'une structure mécanique articulée, le **bras maître**, équipée de moteurs et de capteurs, reliés à une électronique embarquée. L'utilisateur prend en main la poignée située à l'extrémité de la structure et peut la déplacer librement, provoquant ainsi le déplacement de l'image dans la scène virtuelle. L'image ci-contre représente un opérateur qui s'entraîne au montage d'un moteur lève-vitre dans une portière d'automobile. Une image de synthèse reconstitue l'environnement tridimensionnel de travail et deux bras maîtres réalisent le retour d'effort sur les mains de l'opérateur simulant ainsi les résistances générées par le composant à manipuler et les chocs sur cet environnement. L'opérateur perçoit la scène grâce au retour visuel et aux retours d'effort, ces derniers constituant le flux haptique.



La société HAPTION conçoit et commercialise des interfaces à retour d'effort. Le modèle « VIRTUOSE 6D » permet d'exercer sur la main de l'opérateur trois forces et trois moments. Le modèle « VIRTUOSE 3D » qui

n'exerce, lui, que seulement trois forces est étudié dans un contexte de réalité virtuelle et présenté en figure 1.1 « ANNEXE 1 ».

## A - ANALYSE FONCTIONNELLE ET STRUCTURELLE

### 1- Etude des flux d'informations (voir document «ANNEXE 1»).

Le document « ANNEXE 1 » figure 1.2, donne le niveau A0 du diagramme S.A.D.T. correspondant au système de réalité virtuelle. Sa décomposition au niveau A-0 est fournie, incomplète sur la copie.

**Question 1 :**

- a- Compléter cette figure pour faire apparaître les échanges de données entre les cases d'action.
- b- Préciser le nom des données échangées et compléter les rubriques repérées par une \*.

**Les Fonctions Techniques étudiées dans la suite sont celles recensées en gris dans le diagramme FAST de l'annexe 2.**

### 2- Fonction FT1.2.2 : « Maintenir en position horizontale la platine support de poignée quels que soient les efforts exercés » (voir document «ANNEXE 3»).

Le *Virtuose 3D* présenté sur les figures 3.1 et 3.2 comporte un dispositif spécifique de maintien en position horizontale de son support de poignée, la platine **5**. Ce dispositif agit indépendamment de la motorisation des axes. Le but de ce paragraphe est de montrer que ce dispositif permet de garantir cette condition **quelles que soient les actions mécaniques subies par la poignée**.

Le document « ANNEXE 3 » figure 3.4, montre le détail du dispositif permettant de respecter cette condition. Il est constitué de quatre poulies (la poulie **4** étant double) de même diamètre liées aux solides **1**, **4** et **5**. Deux câbles inextensibles relient sans glisser les poulies **1** et **4** puis **4** et **5**.

**Question 2 :**

- a- Montrer que ce dispositif conduit à  $\vec{\Omega}_{5/1} = \vec{0}$ , et conclure quant à la nature du mouvement de **5/1**.
- b- Ce mouvement permet de définir une liaison entre **5** et **1**, équivalente à la chaîne de solides [**1-2-3-4-5**]. En considérant que cette liaison équivalente **5/1** est parfaite, donner son torseur d'inter-effort et conclure quant au respect de la fonction **FT1.2.2**.

### 3- Fonction FT1.2.5 : « Assurer l'équilibrage statique du bras pour toutes les positions » (voir document «ANNEXE 3»).

Le *Virtuose 3D* comporte un dispositif spécifique d'équilibrage statique qui en dehors de toute action de l'opérateur, permet au bras maître de rester dans la position précédemment acquise. Ce dispositif est actif en parallèle des motorisations qui génèrent le retour d'effort.

Les hypothèses de travail sont les suivantes :

- o Le dispositif spécifique de maintien horizontal de la platine **5** joue son rôle.
- o Le système d'équilibrage statique, non représenté, est actif : il exerce sur chacun des solides **2** et **3**, des actions mécaniques extérieures à ces solides, représentées respectivement par les torseurs

$$\text{couple } \{e_{qu} \Rightarrow 2\} : \left\{ \begin{array}{c} \vec{0} \\ C_{équ2} \cdot \vec{j}_{123} \end{array} \right\}_B \text{ et } \{e_{qu} \Rightarrow 3\} : \left\{ \begin{array}{c} \vec{0} \\ C_{équ3} \cdot \vec{j}_{123} \end{array} \right\}_C.$$

**En conséquence, les deux dispositifs n'ont pas été représentés dans le schéma cinématique partiel à utiliser dans cette partie, celui de la figure 3.3 de l'annexe 3.**

Les hypothèses complémentaires sont :

- o Seules les barres **2** (de longueur  $L_2$  et de masse  $M_2$ ), **3** (de longueur  $L_3$  et de masse  $M_3$ ) et **5** (de longueur  $L_5$  et de masse  $M_5$ ), sont considérées comme ayant une masse non nulle.
- o L'accélération de la pesanteur est  $\vec{g} = -g \cdot \vec{k}_{01}$ .
- o Les liaisons sont parfaites.
- o les moteurs n'exercent aucune action mécanique sur les tambours (couples moteurs nuls).
- o L'opérateur n'exerce aucune action mécanique sur la poignée.

**Question 3 :**

Ecrire sans développer aucun calcul vectoriel, les deux équations scalaires permettant de déterminer  $C_{équ2}$  et  $C_{équ3}$  en fonction des actions de pesanteur agissant sur le mécanisme. Les systèmes isolés seront précisés clairement et les équations mises sous la forme  $\vec{M}(A, i \Rightarrow j) \cdot \vec{i}_k + \dots$

## B - VERIFICATION DES PERFORMANCES

### 4- Fonction FT1.2.6 : « Assurer l'isotropie des efforts exercés sur la main de l'opérateur » (voir document «ANNEXE 3»).

Le but de ce paragraphe est de trouver une relation liant les actions mécaniques (forces) exercées par l'opérateur sur la poignée aux couples articulaires exercés par les moteurs. Cette relation permet de quantifier le défaut d'isotropie en effort. Un système isotrope idéal donne, au centre de l'espace de travail, un effort identique dans toutes les directions lorsque chaque moteur délivre un couple unitaire.

Les hypothèses de travail sont les suivantes :

- o L'équilibrage statique est considéré comme acquis : la somme des torseurs de pesanteur et des torseurs exercés par le dispositif extérieur d'équilibrage est nulle.
- o Le dispositif spécifique de maintien horizontal de la platine **5** joue son rôle.

**En conséquence, les deux dispositifs n'ont pas été représentés dans le schéma cinématique partiel à utiliser dans cette partie, celui de la figure 3.3 de l'annexe 3.**

Les hypothèses complémentaires sont :

- o Aucun mouvement n'est communiqué au point O par l'opérateur (étude statique).
- o Seules les barres **2** (de longueur  $L_2$  et de masse  $M_2$ ), **3** (de longueur  $L_3$  et de masse  $M_3$ ) et **5** (de longueur  $L_5$  et de masse  $M_5$ ), sont considérées comme ayant une masse non nulle.

- o L'accélération de la pesanteur est  $\vec{g} = -g \cdot \vec{k}_{01}$ .

- o Les liaisons sont parfaites.

- o Les actions mécaniques exercées sur les solides **1**, **2** et **3** par les arbres de sortie des dispositifs de réduction de vitesse sont représentées respectivement par les torseurs couple

$$\{\text{Réd}_1 \Rightarrow 1\}: \begin{Bmatrix} \vec{0} \\ C_{q1} \cdot \vec{k}_{01} \end{Bmatrix}_B, \{\text{Réd}_2 \Rightarrow 2\}: \begin{Bmatrix} \vec{0} \\ C_{q2} \cdot \vec{j}_{123} \end{Bmatrix}_B \text{ et } \{\text{Réd}_3 \Rightarrow 3\}: \begin{Bmatrix} \vec{0} \\ C_{q3} \cdot \vec{j}_{123} \end{Bmatrix}_C.$$

- o Les actions mécaniques exercées sur les arbres d'entrée des dispositifs de réduction de vitesse par

$$\text{les moteurs sont représentées respectivement par les torseurs couple } \{\text{Mot}_1 \Rightarrow \text{Réd}_1\}: \begin{Bmatrix} \vec{0} \\ C_{m1} \cdot \vec{k}_{01} \end{Bmatrix}_B,$$

$$\{\text{Mot}_2 \Rightarrow \text{Réd}_2\}: \begin{Bmatrix} \vec{0} \\ C_{m2} \cdot \vec{j}_{123} \end{Bmatrix}_B \text{ et } \{\text{Mot}_3 \Rightarrow \text{Réd}_3\}: \begin{Bmatrix} \vec{0} \\ C_{m3} \cdot \vec{j}_{123} \end{Bmatrix}_C.$$

- o Le torseur d'action mécanique exercé sur la platine **5** par l'opérateur au travers de la poignée de

$$\text{manœuvre } \mathbf{8} \text{ en O est : } \{\text{Op} \rightarrow 5\}: \begin{Bmatrix} F_x \cdot \vec{i}_0 + F_y \cdot \vec{j}_0 + F_z \cdot \vec{k}_0 \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_O.$$

- o Les rapports de réduction des trois réducteurs à cabestans (voir figure 3.6) sont  $r_{01}$ ,  $r_{12}$  et  $r_{23}$ , où chacun d'eux est en valeur absolue inférieur à 1.

#### Question 4 :

En étudiant trois systèmes clairement identifiés, montrer que les relations liant les couples articulaires  $C_{q1}$ ,  $C_{q2}$  et  $C_{q3}$  aux trois efforts  $F_x$ ,  $F_y$  et  $F_z$  peuvent se mettre sous la forme :  $[C_q] = [J_{art}] \cdot [F]$  où :

- $[C_q]$  est la matrice colonne  $[C_q] = \begin{bmatrix} C_{q1} \\ C_{q2} \\ C_{q3} \end{bmatrix}$  ;

- $[F]$  est la matrice colonne  $[F] = \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{bmatrix}$  ;

- $[J_{art}]$  est une matrice 3x3 dont on précisera les termes.

#### Question 5 :

Montrer que les relations liant les couples articulaires  $C_{q1}$ ,  $C_{q2}$  et  $C_{q3}$  aux couples moteurs  $C_{m1}$ ,  $C_{m2}$  et  $C_{m3}$  peuvent se mettre sous la forme :  $[C_m] = [J_{red}] \cdot [C_q]$  où :

- $[C_m]$  est la matrice colonne  $[C_m] = \begin{bmatrix} C_{m1} \\ C_{m2} \\ C_{m3} \end{bmatrix}$  ;

- $[Cq]$  est la matrice colonne  $[Cq] = \begin{bmatrix} Cq_1 \\ Cq_2 \\ Cq_3 \end{bmatrix}$  ;
- $[Jred]$  est une matrice 3x3 dont on précisera les termes.

**Question 6 :**

Montrer que les relations liant les couples moteurs  $C_{m1}$ ,  $C_{m2}$  et  $C_{m3}$  aux trois efforts  $F_x$ ,  $F_y$  et  $F_z$  peuvent se mettre sous la forme :  $[Cm] = [J] \cdot [F]$ .  $[J]$  sera exprimée en fonction des grandeurs matricielles précédentes.

**Question 7 :**

Au centre de l'espace de travail, la matrice  $[Jart]$  s'écrit  $\begin{bmatrix} 0 & -0,540 & 0 \\ 0 & 0 & 0,540 \\ 0,296 & 0 & 0,354 \end{bmatrix}$ . Pour la valeur

maximale du couple moteur sur chaque axe (soit ici 0,955 Nm ou encore  $[Cm] = \begin{bmatrix} 0,955 \\ 0,955 \\ 0,955 \end{bmatrix}$ ), trouver

des valeurs minimales des rapports de réduction des trois réducteurs à cabestans,  $r_{01}$ ,  $r_{12}$  et  $r_{23}$ , permettant de respecter le premier niveau d'exigence de la fonction **FT1.2.6** (figure 2.2), sachant que  $r_{12} = r_{23}$ .

**Question 8 :**

a- Exprimer littéralement la matrice  $[MF]$  telle que  $\| [F] \|^2 = {}^t[Cm] \cdot [MF] \cdot [Cm]$ , en fonction des matrices précédentes où  ${}^t[Cm]$  est la matrice transposée de  $[Cm]$ .

b- Cette matrice symétrique s'écrit au centre de l'espace de travail et après diagonalisation :

$[MF] = \begin{bmatrix} 17,441 & 0 & 0 \\ 0 & 3,429 & 0 \\ 0 & 0 & 2,232 \end{bmatrix}$ , avec les rapports de réduction  $r_{01}$ ,  $r_{12}$  et  $r_{23}$  choisis par le constructeur.

Montrer que le second niveau d'exigence de la fonction **FT1.2.6** est bien respecté (figure 2.2).

**5- Fonction FT2: « Coupler le bras maître et le système virtuel » (voir document « ANNEXE 4 »).**

Le document « ANNEXE 4 » rassemble les informations utiles à l'étude qui se limite à l'axe numérique associé à la rotation du socle **1** par rapport à **0** selon l'axe  $(A, \vec{k}_{01})$ . La description des chaînes d'énergie et d'information met en évidence une mesure du courant absorbé par le moteur. Cette mesure est utilisée pour asservir le courant électrique absorbé. Le couple électromagnétique généré dans le moteur étant proportionnel au courant d'induit, cet asservissement en courant permet une réalisation simple d'un asservissement de couple. Un modèle d'étude du bras maître est ainsi obtenu où :

- o La consigne de couple  $C_c(p)$  est élaborée par l'interface de couplage ;
- o L'action de l'opérateur  $C_{op}(p)$  est équivalente à une perturbation ;
- o La sortie  $Q_1(p)$  représente la position angulaire du bras selon l'axe  $(A, \vec{k}_{01})$ .

Après réduction des schémas-blocs et approximation des modèles afin d'en réduire l'ordre, les fonctions de transfert  $G_1(p)$  et  $G_2(p)$  ont été retenues pour l'étude proposée. (voir document « ANNEXE 4 »)

L'interface de couplage permet au système virtuel de reproduire les mouvements du bras maître et de retransmettre à celui-ci une image des résistances mécaniques virtuelles rencontrées. Cette interface de couplage est caractérisée à ce niveau de description par les deux fonctions de transfert de couplage :

$$\frac{C_c(p)}{\Delta Q(p)} \text{ et } \frac{C_v(p)}{\Delta Q(p)}, \text{ avec : } \frac{C_c(p)}{\Delta Q(p)} = -(b_m \cdot p + k_m), \frac{C_v(p)}{\Delta Q(p)} = (b_v \cdot p + k_v).$$

Les paramètres  $b_v$ ,  $b_m$ ,  $k_v$ ,  $k_m$  constituent les **paramètres de réglage** de l'interface.

On admettra dans l'étude que le comportement du système virtuel est modélisé par la fonction de transfert  $H_v(p)$  définie sur le document « ANNEXE 4 ».

**Réglage de l'interface de couplage**

Régler l'interface consiste à déterminer les valeurs de  $b_v$ ,  $b_m$ ,  $k_v$ ,  $k_m$  satisfaisant conjointement trois critères : **raideur**, **stabilité** et **bande passante**. L'étude proposée vise à établir à partir de ces critères des relations de

contrainte sur certains de ces paramètres. Ces relations seront exploitées lors de la procédure de mise au point ultérieure de l'interface qui nécessitera l'assistance de moyens informatiques et une validation « in situ ».

### Etude liminaire

$H_m(p)$  définit la fonction de transfert motrice avec :  $H_m(p) = \frac{Q_v(p)}{C_{op}(p)}$ .

Une manipulation des schémas-blocs du modèle continu permet de faire apparaître une fonction de transfert  $H_0(p)$  dite « en boucle ouverte », dont l'insertion dans une boucle à retour unitaire fournit un système équivalent à  $H_m$ . (voir figure 4.3)

#### Question 9 :

- Donner l'expression de la fonction de transfert  $H_m(p)$  en fonction de  $G_1$ ,  $G_2$ ,  $H_v$ ,  $b_v$ ,  $b_m$ ,  $k_v$ ,  $k_m$  et de la variable  $p$ .
- Dans le contexte du schéma-bloc général de la figure 4.3, exprimer  $H_0(p)$  en fonction de  $H_m(p)$ .
- Déduire des résultats précédents l'expression de la fonction de transfert  $H_0(p)$  en fonction de  $G_1$ ,  $G_2$ ,  $H_v$ ,  $b_v$ ,  $b_m$ ,  $k_v$ ,  $k_m$  et de la variable  $p$ .
- Déterminer l'expression du gain statique  $K_0$  de  $H_0$  en fonction de  $k_v$  et  $k_m$ .

### Critère de raideur

La raideur d'un système mécanique caractérise ses déformations sous l'effet des efforts qui lui sont appliqués. Par extension, on définit la raideur de l'axe étudié sur le bras maître par :

$$C_{op} = R \cdot q_v$$

avec  $R$  en Nm/rad,  $C_{op}$  en Nm et  $q_v$  en rad.

On considère que :

- la structure mécanique du bras maître est infiniment rigide (pas de déformations des éléments mécaniques sous charge) ;
- la stabilité de  $H_m$  est acquise ;
- que l'opérateur délivre un échelon unitaire de couple  $C_{op}(p)$ , ( $C_{op}(t) = 1 \cdot u(t)$  avec  $u(t) = 0$  si  $t < 0$  et  $u(t) = 1$  si  $t > 0$ ),
- $b_v$ ,  $b_m$ ,  $k_v$ ,  $k_m$  sont non nuls.

#### Question 10 :

- Calculer en régime permanent la raideur  $R$  de la chaîne présentant  $C_{op}(p)$  en entrée et  $Q_v(p)$  en sortie.
- En déduire la relation existant entre  $k_v$  et  $k_m$  permettant de satisfaire le critère de raideur (figure 2.2).

Sont fournis sur le document réponse les diagrammes de Bode de  $H_m(j,\omega)$ , sa réponse indicielle et le diagramme de Black de  $H_0(j,\omega)$  obtenus pour un réglage des paramètres  $b_v$ ,  $b_m$ ,  $k_v$  et  $k_m$ . Les candidats veilleront à laisser apparaître leurs relevés sur ces graphes lorsqu'ils seront amenés à les exploiter.

### Critère de stabilité absolue

#### Question 11 :

- Donner l'ordre de  $H_m(p)$  et indiquer si elle présente un risque potentiel d'instabilité.
- Si tel devait être son comportement, comment celui-ci se manifesterait-il lors d'une manipulation du bras maître par l'opérateur ?
- En exploitant les informations dont vous disposez, énoncer deux arguments différents qui permettent d'affirmer que le réglage proposé assure la stabilité de  $H_m(p)$ .

### Critère de bande passante motrice

La bande passante motrice est définie comme la bande de fréquence correspondant à l'intervalle  $]0, f_{3dB}]$  où  $f_{3dB}$  désigne la fréquence pour laquelle l'amplitude du signal de sortie de  $H_m(j,\omega)$  est atténuée de 3dB par rapport à l'amplitude statique.

#### Question 12 :

Le critère de bande passante est-il vérifié (figure 2.2) ? Justifier votre réponse.